UNIDADE 2
Matrizes e determinantes

SUMÁRIO DA UNIDADE

Introdução da Unidade

Nesta unidade, você vai estudar as operações com matrizes, o determinante de uma matriz, suas aplicações e propriedades; conteúdos que estão na base da Álgebra linear e o conhecimento sobre eles permitirá o estudo de temas mais complexos e formais ao longo do estudo da disciplina.

A adição de matrizes encontra inúmeras aplicações como em casos de controle de custos, ou estoques, por exemplo; por outro lado o produto de matrizes é a base matemática do movimento de rotação na computação gráfica, dentre outras aplicações. Os determinantes e suas propriedades são parte fundamental da resolução de sistemas lineares, por meio de alguns métodos, apenas para citar uma aplicação. Nesse sentido, o conteúdo dessa unidade ampliará seu conhecimento sobre o campo de aplicações das matrizes e determinantes. Portanto, nesse momento da disciplina é importante construir o conhecimento sobre operações com matrizes e determinantes de forma de forma aplicada, mas também formal, para que sua evolução na Álgebra Linear ocorra de modo gradual e consistente.

2. Matrizes e Determinantes

Operações com matrizes

2.2.1. Adição de matrizes

A soma de duas matrizes de mesma ordem $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})_{\mathbf{m \times n}}$ e $\mathbf{B} = (\mathbf{b_{ij}})_{\mathbf{m \times n}}$ é definida como sendo a matriz $\mathbf{C_{m \times n}}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = [\mathbf{a_{ij}} + \mathbf{b_{ij}}]_{\mathbf{m \times n}} \ , \forall\, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}.$$

Obtida somando-se os elementos correspondentes de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, ou seja, $\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}}$.

Notação: C = A + B

Exemplos

Consideremos as produções de uma indústria que produz motocicletas, dos modelos P1 e P2, nas cores preta, azul e prata, nos meses de janeiro e fevereiro de um mesmo ano:

Produção de Janeiro

Cor	Modelo	
	P1	P2
Preta	200	190
Azul	180	150
Prata	120	100

Produção de fevereiro

Cor	Modelo	
	P1	P2
Preta	220	205
Azul	210	170
Prata	130	110

Produção do período janeiro – fevereiro

Cor	Modelo	
	I	II
Azul	200 + 220 = 420	190 + 205 = 395
Verde	180 + 210 = 390	150 + 170 = 320
Branco	120 + 130 = 250	100 + 110 = 210

Esse cálculo, matricialmente, é dado por

$$\begin{pmatrix} 200 & 190 \\ 180 & 150 \\ 120 & 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 220 & 205 \\ 210 & 170 \\ 130 & 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 & 395 \\ 390 & 320 \\ 250 & 210 \end{pmatrix}$$

Exemplos

Determine a matriz $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, sendo as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, as seguintes e $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{s}$ quaisquer números reais.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -t \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } S = \begin{bmatrix} s & 2 & 0 & -1 \\ 2 & y & -2 & -t \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -t & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolução

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0+s} & \boldsymbol{2+2} & \boldsymbol{0+0} & \boldsymbol{-1-1} \\ \boldsymbol{-2+2} & \boldsymbol{0+y} & \boldsymbol{2-2} & \boldsymbol{-t-t} \\ \boldsymbol{0+0} & \boldsymbol{-2-2} & \boldsymbol{0+0} & \boldsymbol{0+0} \\ \boldsymbol{1+1} & \boldsymbol{t-t} & \boldsymbol{0+0} & \boldsymbol{0+0} \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{C = \begin{bmatrix} s & 4 & 0 & -2 \\ 0 & y & 0 & -2t \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Saiba mais...

Sobre a adição de matrizes, por meio de uma aplicação à computação gráfica, neste vídeo.

Bibliografia comentada

No livro, Álgebra linear com aplicações, de Anton & Rorres - capítulo 1; e em Elementos de Álgebra Linear, de Larson – em 2.2; leia algumas provas das propriedades de operações com matrizes. Essa matemática mais formal, com seus teoremas, propriedades e demonstrações deve fazer parte da formação de professores de matemática, e essa é uma das motivações para que você acesse os textos de referência em cada disciplina.

RORRES, H. A. C.; **Álgebra Linear com aplicações**; 10ª ed.; Bookman; Porto Alegre, 2010.

2.1.2. Multiplicação de matriz por escalar

O produto de uma matriz por um escalar é realizado multiplicando-se cada elemento dessa matriz por tal escalar.

Considerando o escalar (número) α, o produto da matriz *A* pelo escalar α é uma matriz de mesma ordem, cujos elementos foram multiplicados pelo valor α, de outro modo, se $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]_{\boldsymbol{m \times n}}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o produto de $\boldsymbol{A}$ pelo escalar α é uma matriz B de elementos $\boldsymbol{b_{ij}}$ com $\boldsymbol{b_{ij}} = \alpha \,.\, \boldsymbol{a_{ij}}$ para todos os valores *i*, *j* definidos na matriz *A*, ou seja

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b_{ij}}]_{\boldsymbol{m \times n}}, \qquad \boldsymbol{tal\ que\ \ b_{ij} = \alpha \,.\, a_{ij}\ \forall\ i, j.}$$

Notação: $\boldsymbol{B - \alpha A} = [\boldsymbol{\alpha a_{ij}}]_{\boldsymbol{m \times n}}$

Atenção para saber

Escalar

Geralmente, é um número real $\alpha \in \mathbb{R}$. É possível, também, que os escalares sejam números complexos. Os escalares podem pertencer a qualquer sistema numérico no qual seja possível realizar as quatro operações básicas, segundo as leis habituais da aritmética.

Exemplos

Um professor tem sua carga horária semanal descrita no quadro abaixo:

Turno	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex
Manhã	3	0	2	0	2
Tarde	0	0	0	3	0
Noite	3	2	3	0	0

Se a carga horária do professor for dobrada, nos mesmos dias e turnos, qual será a matriz que representará a nova carga-horária semanal.

Figura 4: Carga horária do professor

Link da imagem: Disponível em: https://www.shutterstock.com/pt/image-photo/school-schedule-concept-man-beard-mustache-1372399721?src=7Sqt4ElOZDm_4WdiCi0UCw-2-74

Fonte: Shuterstock, 2019.

Resolução

Se a carga-horária foi duplicada nos mesmos dias e turnos, podemos multiplicar a matriz por 2 (escalar), assim se A é a matriz de sua carga-horária atual

$$2 \,.\, A = 2 \,.\begin{bmatrix} 2\,.\,3 & 2\,.\,0 & 2\,.\,2 & 2\,.\,0 & 2\,.\,2 \\ 2\,.\,0 & 2\,.\,0 & 2\,.\,0 & 2\,.\,3 & 2\,.\,0 \\ 2\,.\,3 & 2\,.\,2 & 2\,.\,3 & 2\,.\,0 & 2\,.\,0 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{2A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Observação: Quando $\alpha = \boldsymbol{-1}$, podemos escrever $\boldsymbol{-1.A = -A}$

2.1.3. Multiplicação de matrizes

Cada elemento de uma matriz que seja o produto de duas matrizes é dado pela por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da $\boldsymbol{i - ésima}$ linha da primeira matriz pelos elementos da $\boldsymbol{j - ésima}$ coluna da segunda matriz.

Definição:

Dadas as matrizes $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ik}}]_{\boldsymbol{m\times p}}$ e $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b_{kj}}]_{\boldsymbol{p\times n}}$, o produto das matrizes *A* e *B* será uma matriz $\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{c_{ij}}]_{\boldsymbol{m\times n}}$, cujos elementos $\boldsymbol{c_{ij}}$ serão da forma:

$$\boldsymbol{c_{ij} = a_{i1} \,.\, b_{1j} + a_{i2} \,.\, b_{2j} + a_{i3} \,.\, b_{3j} + \cdots + a_{in} \,.\, b_{nj}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \,.\, b_{kj}}$$

Atenção para saber

Duas matrizes A e B só podem ser multiplicadas se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz, ou seja, $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ik}}]_{\boldsymbol{m\times p}}$ e $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b_{kj}}]_{\boldsymbol{p\times n}}$.

A matriz produto terá como ordem o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz, assim se $\boldsymbol{C}$ é a matriz produto $\boldsymbol{A_{m\times p} \,.\, B_{p\times n}}$, então $\boldsymbol{C}$ tem como ordem $\boldsymbol{C_{m\times n}} = \underbrace{\boldsymbol{A_{m\times p} \,.\, B_{p\times n}}}_{\text{Ordem de C}}$

Observações:

- O produto de matrizes **não** é obtido pela simples multiplicação dos elementos correspondentes.
- O produto de matrizes não é comutativo, ou seja, $\mathbf{A + B \neq B + A}$

Exemplos

Observe o processo de multiplicação da matriz $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$ pela matriz $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{2.1+(-1.1)} & \mathbf{1.1+0.1} & \mathbf{0.1+1.1}\\ \mathbf{1.1+0.(-1)} & \mathbf{1.1+0.(-1)} & \mathbf{0.1+1.(-1)}\\ \mathbf{0.1+1.0} & \mathbf{1.1+0.0} & \mathbf{0.1+1.0}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

2.1.3. Propriedades das operações com matrizes

Definidas as matrizes $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a_{ij}}]_{\boldsymbol{m\times n}}$, $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{b_{ij}}]_{\boldsymbol{m\times n}}$ e $\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{c_{ij}}]_{\boldsymbol{m\times n}}$, temos as propriedades, a seguir:

Propriedades da Adição

P1) Comutatividade: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

P2) Associatividade: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

P3) Elemento Neutro da Soma: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{O}=[\mathbf{0}]_{\boldsymbol{m\times n}}$;

P4) Elemento Simétrico: $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

Propriedades da multiplicação de matriz por escalar

Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ duas matrizes da mesma ordem e α, β dois escalares, então:

P1) $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta A})=(\boldsymbol{\alpha\beta})\boldsymbol{A}$;

P2) $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{\alpha A}+\boldsymbol{\alpha B}$;

P3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha A}+\boldsymbol{\beta A}$;

P4) $\mathbf{1} \,.\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

Observação: A multiplicação do escalar $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ pela matriz $\boldsymbol{A}$, tem como resultado a matriz nula, ou seja, $\mathbf{0} \,.\, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

Bibliografia comentada

No livro, Álgebra linear com aplicações, de Anton & Rorres - capítulo 1; e em Elementos de Álgebra Linear, de Larson – em 2.2; leia algumas provas das propriedades de operações com matrizes. Essa matemática mais formal, com seus teoremas, propriedades e demonstrações deve fazer parte da formação de professores de matemática, e essa é uma das motivações para que você acesse os textos de referência em cada disciplina.

RORRES, H. A. C.; **Álgebra Linear com aplicações**; 10ª ed.; Bookman; Porto Alegre, 2010.

LARSON, R.; **Elementos de Álgebra Linear**; 8ª ed.; Cengage; São Paulo, 2017

2.1.4. Potenciação de matriz

Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada e $\boldsymbol{p}$ um número inteiro positivo, a potência $\boldsymbol{p}$ da matriz $\boldsymbol{A}$ é definida por

$$\boldsymbol{A^p} = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{p} \text{ vezes}}$$

Observação: Por definição, se $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$, então $\boldsymbol{A^0} = \boldsymbol{I}$.

Exemplos

Determine $\boldsymbol{A^3}$, se $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Resolução

$\boldsymbol{A^3} = \boldsymbol{A^2} \cdot \boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A^2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^2} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{Logo,}\ \boldsymbol{A^3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

2.2. Determinantes

A toda matriz quadrada pode ser associado um número real chamado determinante. Historicamente, o uso de determinantes originou-se do reconhecimento de padrões especiais que ocorriam nas resoluções de sistemas de equações lineares. Pode-se dizer que o determinante é uma função matricial que associa a cada matriz quadrada um escalar, representando a matriz por um número real. Essa função matricial permite, por exemplo, identificar se uma matriz tem ou não inversa, e está associada a área de algumas figuras planas, portanto também relaciona-se com a geometria.

2.2.1. Definição de determinante

Determinante de matriz 1x1

O determinante de uma matriz quadrada de primeira ordem é igual ao próprio elemento da matriz. Dessa forma, para cada matriz $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}]$ o determinante de $\boldsymbol{A}$, denotado por $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A})$, é igual a $\boldsymbol{a}$, portanto $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{a}$.

Exemplos

A matriz A de ordem 1x1, $\boldsymbol{A} = [-\mathbf{20}]$ tem como determinante $-\mathbf{20}$, isto é,

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) = -\mathbf{20}$$

Determinante de matriz 2x2

O determinante da matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} \end{bmatrix}$ é dado por

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{a}_{11} \cdot \boldsymbol{a}_{22} - \boldsymbol{a}_{12} \cdot \boldsymbol{a}_{21}$$

O determinante da matriz quadrada de ordem 2 é igual a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Exemplos

O determinante da matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$ é calculado por:

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{a}_{11} \cdot \boldsymbol{a}_{22} - \boldsymbol{a}_{12} \cdot \boldsymbol{a}_{21} = \mathbf{2} \cdot (-\mathbf{1}) - (+\mathbf{1}) \cdot (-\mathbf{1})$$
$$= -\mathbf{2} - (-\mathbf{1}) = -\mathbf{2} + \mathbf{1} = -\mathbf{1}$$

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = -\mathbf{1}$$

Atenção para saber

Notações para determinante:

- $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A})$ ou $|\boldsymbol{A}|$
- Na forma matricial, as duas barras (com ou sem colchetes internos) denotam que se trata do determinante da matriz, como em $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} \end{vmatrix}$, ou seja, o que se está considerando é o número associado à matriz (determinante), e não especificamente a matriz correspondente.

Aplicação à Geometria

Dados os pontos $\mathbf{A} = (\mathbf{4}, \mathbf{1})$ e $\mathbf{B} = (\mathbf{1}, \mathbf{3})$, determine a área do paralelogramo, a seguir:

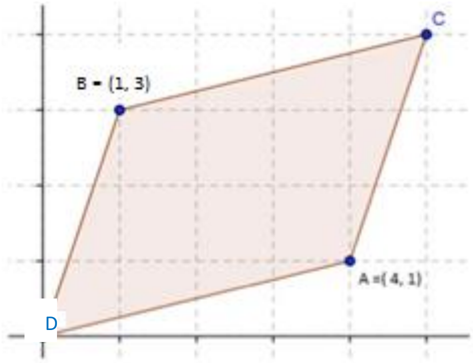

Figura 5: Paralelogramo ABCD. Fonte: Elaborada pela autora.

Resolução:

A área do paralelogramo que tem um de seus vértices posicionado na origem dos sistemas de eixos coordenados é numericamente igual ao módulo do determinante de uma matriz $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$*, cujas linhas são as coordenadas dos dois vértices adjacentes à origem. Logo, a área do paralelogramo acima é dada por*

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{P}) = \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \mathbf{4} \cdot \mathbf{1} - (\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}) = \mathbf{4} - \mathbf{3} = \mathbf{3}\ \boldsymbol{unidades\ de\ área}$$

- (1 x 1) +(4 x 3)

Observação: Na disciplina em que você estudar cálculo vetorial, conhecerá a associação desta área e determinante ao produto escalar de dois vetores.

Determinante da matriz 3x3

A introdução ao cálculo de determinantes de matrizes de ordem $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$, em geral, é realizada no ensino médio utilizando a Regra de Sarrus.

O método proposto pela regra de Sarrus consiste em efetuar os seguintes passos:

1. Copiara duas primeiras colunas, no lado direito da matriz.
2. Multiplicar os elementos da diagonal principal e, na mesma direção da diagonal principal, multiplicar os elementos das outras duas paralelas à diagonal principal à sua direita.
3. Multiplicar os elementos da diagonal secundária e, na mesma direção, os elementos das outras duas paralelas à sua direita.

4. O determinante da matriz é a diferença entre o produto obtido no passo 2 e o produto obtido no passo 3.

Acompanhe o exemplo a seguir, em que o determinantes da matriz A é calculado pela Regra de Sarrus.

Exemplos

Determine o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Resolução

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{matrix}$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) - [3 \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \cdot 5]$$

$$= 10 - 8 - [-6 + 12 + 0] \quad det(A) = -4$$

2.2.2. Cofatores

Para definir o determinante de uma matriz quadrada de ordem superior a 2, torna-se conveniente utilizar *menores* e *cofatores*.

Menor de uma matriz

Dada uma matriz quadrada, $A = [a_{ij}]_n$, o menor da matriz A, chamada de M_{ij} , é uma submatriz de ordem $(n-1)$ obtida ao excluir a linha i e a coluna j.

Dessa forma, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow M_{ij} = \left[a_{ij} \right]_{(n-1)}.$$

Com,

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Exemplos

Determine a menor da matriz A, sendo $\boldsymbol{M_{34}}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \cancel{6} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cancel{4} \\ \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cancel{0} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cancel{1} \end{bmatrix} \qquad M_{34} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cofatores dos elementos de uma matriz

O cofator $\boldsymbol{A_{ij}}$ do elemento na posição $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ de uma matriz $\boldsymbol{A}$ é calculado pelo produto do determinante de $\boldsymbol{M_{ij}}$ pelo valor de $(-\mathbf{1})^{i+j}$, ou seja,

$$\boldsymbol{A_{ij}} = (-\mathbf{1})^{i+j} \cdot \mathbf{det}(\boldsymbol{M_{ij}})$$

Exemplos

Determine os cofatores A_{ij} dos elementos da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, e a respectiva matriz de cofatores de A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = +1 \cdot (2 \cdot 5 - 4 \cdot 3) = -2 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot \big(0 \cdot 5 - 4 \cdot (-1)\big) = -4 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = +1 \cdot \big(0 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)\big) = 2 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 5 - 3 \cdot 3) = -1 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = +1 \cdot (1 \cdot 5 - 3 \cdot (-1)) = 8 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot \big(1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)\big) = -5 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = +1 \cdot (2 \cdot 4 - 3 \cdot 2) = 2 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot 4 - 3 \cdot 0) = -4 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = +1 \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 0) = 2 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Logo, a matriz de cofatores de A, denotada por

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -1 & 8 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

2.2.3. Determinante usando cofatores

O determinante de uma matriz quadrada A, de ordem $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{2}$, é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou de uma coluna) qualquer pelos seus respectivos cofatores.

Considerando uma matriz $\boldsymbol{A}$ de ordem $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a_{ij}}]_{\boldsymbol{n}}$, no caso geral, o cálculo do determinante referido a qualquer **linha** $\boldsymbol{k}$, é dado por

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_{kj}} \cdot \boldsymbol{A_{kj}}$$

Onde $\boldsymbol{k}$ é uma linha fixa.

Por outro lado, o cálculo do determinante referido a qualquer **coluna** $\boldsymbol{k}$, é dado por

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a_{ik}} \cdot \boldsymbol{A_{ik}}$$

Onde $\boldsymbol{k}$ é uma coluna fixa.

Atenção para saber

O desenvolvimento acima para cálculo do determinante (usando linhas ou colunas) é comumente conhecido como o desenvolvimento ou teorema de Laplace.

Exemplos

Considerando o exemplo anterior, calcule o determinante da matriz $\boldsymbol{A}$, sendo $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$

Resolução

Sabemos do desenvolvimento do exemplo anterior que a matriz dos cofatores de $\boldsymbol{A}$ *é* $\boldsymbol{Cof}(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{8} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$, *então para calcular o determinante da matriz* $\boldsymbol{A}$, *basta eleger uma linha, ou uma coluna, da matriz* $\boldsymbol{A}$ *e calcular o somatório dos produtos dos elementos dessa linha, ou coluna, por seus correspondentes cofatores.*

*Tomando a **linha 2** para realizar o cálculo do determinante, temos:*

$$|\boldsymbol{A}| = \mathbf{0} \cdot (\mathbf{-1}) + \mathbf{2} \cdot \mathbf{8} + \mathbf{4} \cdot (\mathbf{-5}) = \mathbf{-4}$$
$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{-4}$$

Verifique que o valor do determinante é o mesmo, independentemente da linha ou coluna escolhida.

2.2.4. Propriedades dos determinantes

Considere $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ matrizes quadradas. Então, valem as propriedades dos determinantes.

P1) Se $\boldsymbol{A}$ possui uma linha (ou coluna) de zeros, então, $\boldsymbol{det}\ (\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$;

Exemplos

Seja $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$

P2) Se A possui duas linhas (ou colunas) iguais, então, $\boldsymbol{det}\ (\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$;

Exemplos

Seja $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$

3) Se $\boldsymbol{B}$ é obtida de $\boldsymbol{A}$ multiplicando-se uma linha (ou coluna) por um escalar α, então, $\mathbf{det}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{det}(\boldsymbol{A})$;

Exemplos

Se $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\alpha = \mathbf{2}\ \mathbf{e}\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, então

$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}) = \mathbf{2} \cdot \mathbf{det}(\boldsymbol{A})$

4) Se $\boldsymbol{B}$ é obtida por troca das posições relativas de duas linhas (ou de duas colunas) da matriz $\boldsymbol{A}$, então, $\boldsymbol{det}(\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A})$;

Exemplos

Sejam $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, então

$\mathbf{det}(\boldsymbol{B}) = \mathbf{-1} \cdot \mathbf{det}(\boldsymbol{A})$

5) Se $\boldsymbol{B}$ é obtida de $\boldsymbol{A}$, substituindo-se a linha $\boldsymbol{i}$ (ou coluna) por ela somada a um múltiplo escalar de outra linha $\boldsymbol{j}$ (ou coluna) ($\boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{i}$) então, $\boldsymbol{det}\ (\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{det}(\boldsymbol{A})$;

Exemplos

Se $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} L_2 = L_2 + (-1)\,.\,L_1 + \rightarrow\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} + (\mathbf{-1}) \cdot \mathbf{1} & \mathbf{-1} + (\mathbf{-1}) \cdot \mathbf{2} & \mathbf{1} + (\mathbf{-1}) \cdot (\mathbf{-1}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Assim, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ e $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{det}(\boldsymbol{B})$

6) $\boldsymbol{det}\ (\boldsymbol{A}) = \ \boldsymbol{det}\ (\boldsymbol{A}')$, ou seja, os determinantes de uma matriz A e de sua transposta são iguais.

7) $\mathbf{det}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \mathbf{det}(\boldsymbol{A}) \cdot \mathbf{det}(\boldsymbol{B})$, ou seja, o determinante do produto das matrizes A e B (matriz AB) é igual ao produto do determinante da matriz A pelo determinante da matriz B.

2.3. Matriz adjunta

A matriz adjunta da matriz A, denotada por $\boldsymbol{Adj}\ (\boldsymbol{A})$ é a matriz transposta da matriz dos cofatores da matriz A, ou seja,

$$\boldsymbol{Adj}\ (\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{Cof}(\boldsymbol{A}))'$$

Exemplos

Se $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{2} & -\mathbf{4} \end{pmatrix}$, então os cofatores dos elementos de B são:

$$\boldsymbol{A}_{11} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{1}+\mathbf{1}} \cdot \mathbf{det}[-\mathbf{4}] = -\mathbf{4}$$

$$\boldsymbol{A}_{12} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{1}+\mathbf{2}} \cdot \mathbf{det}[\mathbf{2}] = -\mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{A}_{21} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{2}+\mathbf{1}} \cdot \mathbf{det}[-\mathbf{2}] = \mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{A}_{22} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{2}+\mathbf{2}} \cdot \mathbf{det}[\mathbf{1}] = \mathbf{1}$$

Assim, $\boldsymbol{Cof}(\boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} -\mathbf{4} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ e a matriz adjunta da matriz B é a matriz tranposta da matriz Cof(B), ou seja, dada por $\boldsymbol{Adj}(\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{Cof}(\boldsymbol{B}))'$, então

$$\boldsymbol{Adj}(\boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} -\mathbf{4} & \mathbf{2} \\ -\mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

2.4. Matriz inversa

Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem $\boldsymbol{n}$. A matriz $\boldsymbol{A}$ será inversível se existir uma única matriz $\boldsymbol{B}$ (de mesma ordem), de forma que:

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I_n}.$$

Onde $\boldsymbol{B}$ é chamada de matriz inversa de $\boldsymbol{A}$, ou $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}$, desse modo,

$$\boldsymbol{AA}^{-\mathbf{1}} = \boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I_n}$$

Exemplos

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ é inversível, sendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Veja, que

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 7 + 7 \cdot (-2) & 2 \cdot (-3) + 7 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Atenção para saber

- Se uma matriz **A é inversível**, ela é chamada de **não singular**, ou seja, se existe a matriz inversa A^{-1}.
- Se uma matriz **A não é inversível**, ela é chamada de matriz **singular**.

Cálculo da matriz inversa – utilizando a matriz adjunta

Para determinar a matriz inversa de A basta multiplicar o inverso do determinante de A por pela sua matriz adjunta, ou seja,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot Adj(A)$$

Exemplos

Determine a matriz inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução: Para determinar a matriz inversa usamos $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot Adj(A)$. *Dessa forma, precisamos do determinante da matriz A e da matriz adjunta de A.*

1) Cálculo do determinante de ordem 2

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Como $\det(A) \neq 0$, *podemos afirmar que A tem inversa.*

2) Cálculo dos cofatores

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det[4] = 4$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det[3] = -3$

$Cof(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow Adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

Logo, $A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det[2] = -2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det[1] = 1$

Exemplos

Determine a matriz inversa da matriz A, usando a matriz adjunta.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Para determinar a matriz inversa usamos

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot Adj(A)$$

Dessa forma, precisamos do determinante da matriz A e da matriz adjunta de A.

1) Cálculo dos cofatores, porque a $Adj(A)$ é a transposta da matriz dos cofatores.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = +1 \cdot (2 \cdot 5 - 4 \cdot 3) = -2 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot \big(0 \cdot 5 - 4 \cdot (-1)\big) = -4 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = +1 \cdot \big(0 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)\big) = 2 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 \cdot 5 - 3 \cdot 3) = -1 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = +1 \cdot (1 \cdot 5 - 3 \cdot (-1)) = 8 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot \big(1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)\big) = -5 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = +1 \cdot (2 \cdot 4 - 3 \cdot 2) = 2 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot 4 - 3 \cdot 0) = -4 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = +1 \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 0) = 2 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

2) Cálculo do determinante da matriz $\boldsymbol{A}$, pela coluna 1, é dado por

$$\boldsymbol{det(A) = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 = -4}$$

$$\boldsymbol{det(A) = -4}$$

3) A matriz de cofatores de A, é dada por $\boldsymbol{Cof(A)} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -1 & 8 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, *então a*

$$\boldsymbol{Adj(A)} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

4) Cálculo da inversa

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot Adj(A)}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Propriedades da matriz inversa

Se A e B são matrizes inversíveis, então:

P1) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

P2) $(A^{-1})^{-1} = A$;

P3) $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

P4) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Bibliografia comentada

A criptografia é uma das aplicações das matrizes, incluindo as matrizes inversas. Ela protege a confidencialidade e a integridade das informações na internet, por exemplo, onde pode-se incluir o uso da criptografia de dados, o processo de codificar informações, de modo que a única maneira de decodificá-la, seja usar uma chave.

Para saber mais sobre o processo de criptografia, leia o capítulo 2 de Larson, sob o título Elementos de Álgebra linear.

LARSON, R. Elementos de Álgebra Linear; 8ª ed.; Cengage: São Paulo, 2017. (Minha Biblioteca)

Figura 6: Criptografia

Link da imgem: Disponível em: https://www.shutterstock.com/pt/image-illustration/encryption-cryptography-conceptual-illustration-digital-keys-1152748454?src=lQF9Z8jx_G8Ud8lqDD31eA-2-12

Fonte: Shutterstock, 2019.

Conclusão

Nesta unidade, você estudou operações com matrizes, determinantes e suas propriedades, cofatores e as matrizes adjunta e inversa. Estes conhecimentos são importantes para o desenvolvimento de resoluções de problemas que envolvem matrizes.

Nos cálculos com matrizes é preciso conhecer a forma de cálculo da adição, na qual somamos os elementos correspondentes de cada matriz; a forma de cálculo da multiplicação de escalar por matriz, quando se faz o produto de cada elemento da matriz pelo escalar (nos nossos exemplos os escalares são números reais); a forma de cálculo do produto de matrizes, quando é necessário que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de colunas da segunda matriz e a decorrente potenciação de matrizes.

Ao estudar determinantes, que são números associados a matrizes quadradas, é bastante útil aplicar as propriedades do determinante de uma matriz, já que pode nos fornecer informações sobre, por exemplo, a existência de inversa dessa matriz. Ainda, você estudou cofatores dos elementos de uma matriz, dos quais o cálculo também depende de determinantes.

Por fim, após o estudo de operações de adição, multiplicação por escalar e multiplicação de matrizes, e cálculo de determinantes e cofatores dos elementos de uma matriz; pudemos determinar as matrizes adjunta e inversa de uma matriz considerada.

Todas essas operações e propriedades são aplicadas quando da resolução de problemas que envolvam a representação matricial. No caso dos sistemas de equações lineares, por exemplo, em primeiro lugar há uma modelagem matemática que “traduz” o problema real para uma linguagem matemática, que neste caso são as equações lineares, as quais juntas formam um sistema de equações lineares; e após esse passo ocorre a representação desse sistema linear em forma de matrizes, ou matricialmente, e a partir de então se realizam operações com linhas e/ou colunas dessa matriz que levam a solução do sistema, por diferentes métodos, como o escalonamento e o método da matriz inversa, os quais serão tratados na próxima unidade, sob o título Sistemas lineares.

Bons estudos!

Referências Bibliográficas (Unidade)

ANTON, Howard; RORRES, Chris. Álgebra Linear com aplicações; 10ª ed.; Bookman: Porto Alegre, 2010.

ANTON, H.; BUSBY, R.C. Álgebra Linear Contemporânea; Bookman: Porto Alegre, 2007.

KOZAKEVICH, Daniel; BEAN, Sonia. Álgebra Linear. 2ª. ed. – Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2011.

LARSON, R. Elementos de Álgebra Linear; 8ª ed.; Cengage: São Paulo, 2017.
https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788522127238/cfi/0!/4/2@100:0.00

LIPSON, M. LIPSCHUTZ, S.; Álgebra Linear; 4a ed.; Bookman: Porto Alegre, 2011.
https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788540700413/cfi/0!/4/2@100:0.00