Matemática Aplicada

Rio de Janeiro
UVA
2018

André Ladeira – Roberta Mendiondo
Alcindo Miranda – Edézio Sacramento

Matemática Aplicada

Coordenação de André Ladeira

Rio de Janeiro
UVA
2018

Texto de acordo com as normas do Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa.

ISBN: 978-85-69287-43-8

Autoria do Conteúdo
André Ladeira (Coord.)
Roberta Mendiondo
Alcindo Miranda
Edézio Sacramento

Projeto Gráfico
UVA

Diagramação
Isabelle Martins

Revisão
Janaína Senna
Adriana Passos
Lydianna Lima

Imagens
shutterstock.com

M425 Matemática aplicada [livro eletrônico] / André Ladeira, coordenador ; [autores] Roberta Mediondo, Alcindo Miranda, Edézio Sacramento. – Rio de Janeiro : UVA, 2018.

1,4 MB.

ISBN 978-85-69287-44-5
Disponível também impresso.

1. Matemática aplica. 2. Matemática financeira. 3. Administração - matemática. I. Ladeira, André. II. Mediondo, Roberta. III. Miranda, Alcindo. IV. Sacramento, Edézio. V. Universidade Veiga de Almeida.

CDD – 510

Bibliotecária Katia Cavalheiro CRB 7 - 4826.
Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UVA.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Por intermédio da matemática, tudo pode ser medido ou calculado. E, quando discorremos sobre matemática aplicada, estamos certamente abordando o ramo da matemática que trata da aplicação do conhecimento matemático a diversos outros domínios e áreas de conhecimento.

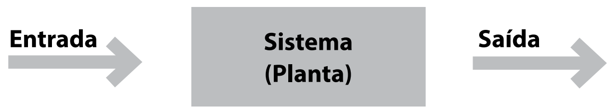
Tais aplicações incluem cálculo numérico, engenharia, programação linear, otimização, modelagem contínua, biomatemática e bioinformática, teoria da informação, teoria dos jogos, probabilidade e estatística, matemática financeira, criptografia, combinatória e até mesmo geometria finita e muito do que chamamos de ciência da computação.

Em épocas passadas, a matemática era considerada importante quase que unicamente para as ciências naturais e a engenharia. Entretanto, desde a Segunda Guerra Mundial, campos fora das ciências físicas deram origem à criação de novas áreas de matemática, como teoria dos jogos, teoria da escolha social e o conceito de redes neurais, que surgiram a partir dos estudos do cérebro pela neurociência.

Atualmente, o termo "matemática aplicada" é usado em um sentido bastante amplo, que inclui as áreas acima mencionadas e também diversas outras que estão se tornando cada vez mais importantes a partir de sua aplicação. O sucesso dos modernos métodos matemáticos e de programas de computador possibilitaram a criação da matemática computacional, ciência computacional e engenharia computacional, que usam computação de alta performance para a simulação de certos fenômenos e busca de soluções para problemas nas ciências e na engenharia. Por isso, essas áreas são frequentemente consideradas como matérias interdisciplinares, todas estreitamente ligadas à matemática aplicada.

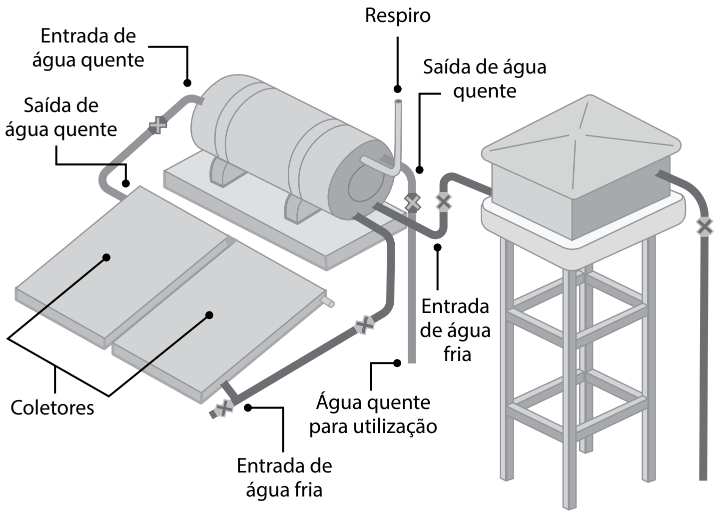
O que é modelagem?

Um sistema possui sempre uma relação entre sua(s) entrada(s) e sua(s) saída(s), como pode ser visto no diagrama abaixo:



O sistema poderia ser, por exemplo, o de um aquecedor solar de água para consumo residencial. A água vem de um reservatório (que pode ser proveniente de captação da água de chuva) e, por estar em temperatura mais baixa, é mais densa e mais pesada e acaba por descer até o painel solar, onde um sistema de serpentina capta e converte a energia solar em energia térmica e a transfere para a água, fazendo-a aquecer. Assim, a água se torna menos densa e mais leve e sobe (convecção térmica) em direção ao reservatório, que a acumula e a mantém aquecida para consumo.

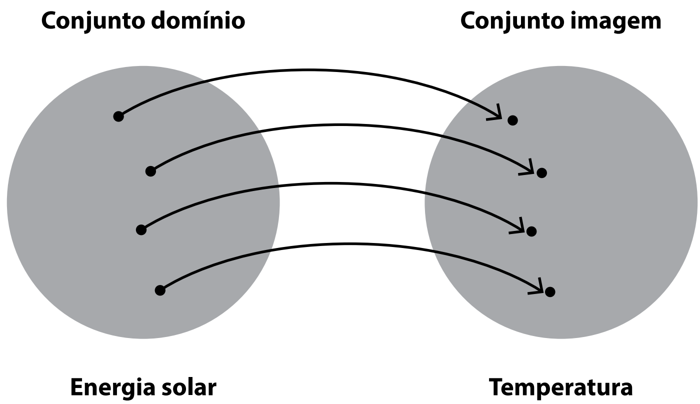
Por analogia ao diagrama acima, temos a entrada sendo, por exemplo, a intensidade da luz solar (energia solar), e a saída, a temperatura da água aquecida. O esquema seria representado graficamente da seguinte forma:



Adaptado de: <http://pegueideias.com/aquecedor-de-agua-solar-solarmix-economia-na-conta-de-energia-uberlandia>.

Note que a entrada de energia solar pode ser definida como “E”, e a saída, como temperatura “t” da água aquecida. Não é difícil entender que existe uma relação entre a maior ou a menor incidência de luz solar (energia solar) e a temperatura da água na saída.

Veja que falamos de uma “relação”, o que nos remete ao conceito matemático de uma função entre duas variáveis. Nesse caso, a temperatura da água é uma função da intensidade de incidência de luz solar. Não lembra a teoria dos conjuntos e suas relações?



Então temos uma equação matemática que estabelece uma relação entre as variáveis E e t, dada por:

$$t = k \, . \, E$$

No exemplo acima, trata-se de uma relação linear (***Modelo Linear*** – Capítulo 1), mas poderia ser quadrática (***Modelo Quadrático*** – Capítulo 2):

$$t = k \, . \, E^2$$

E poderia ser, ainda, exponencial (***Modelo Exponencial*** – Capítulo 3):

$$t = k \, . \, e^{E}$$

Ou, ainda, outros modelos matemáticos mais ou menos complexos. Um exemplo para esse mesmo sistema seria: a energia útil é avaliada pelo ganho de calor que a água tem devido a sua circulação pelo coletor solar (painel solar). Ela pode ser determinada por meio da relação:

$$Q = m \,.\, C \,.\, (T_2 - T_1)$$

Ou, ainda:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{Q}{m \,.\, C}$$

"Q" representa o fluxo de energia que chega ao reservatório (watts); "m" é o fluxo de massa de água (kg/s); "C" é o calor específico da água (kJ/kg °C), e T1 e T2 são as temperaturas da água antes e após ter passado pelo painel solar coletor (°C).

Sabemos que, quando estamos tomando um banho em um chuveiro elétrico e queremos a água mais quente, temos de reduzir a vazão de água na torneira. A água, então, fica "fraca", mas "quente". Veja a importância da modelagem matemática, que explica esse comportamento. Note que, na equação, "Q" é constante (o que equivale a dizer que é o chuveiro na posição inverno) e representa a entrega de uma certa quantidade de energia térmica ao sistema do chuveiro, mas, como o calor específico (C) é constante também, então as variáveis nessa análise serão a vazão da água e a variação da temperatura; como o seu produto será constante (Q), quando uma aumenta (ΔT), a outra tem de diminuir (m).

O modelo mais adequado para cada planta dependerá das características dos elementos da planta (do sistema), que, no nosso caso, dependerá de como a transferência de calor dos painéis solares se comporta em função do fluxo de água, do tempo, da eficiência térmica, da natureza dos materiais utilizados etc.

O que se pode concluir, então? Que podemos, se conhecermos as entradas e as saídas de um determinado sistema, estabelecer uma relação, ou seja, uma função matemática (modelo matemático), capaz de descrever como as duas variáveis de entrada e saída se relacionam e, assim, escrever a equação que modela o sistema, o que nos permitirá estudar, simular, analisar, comparar, projetar, corrigir, ajustar e desenvolver os sistemas.

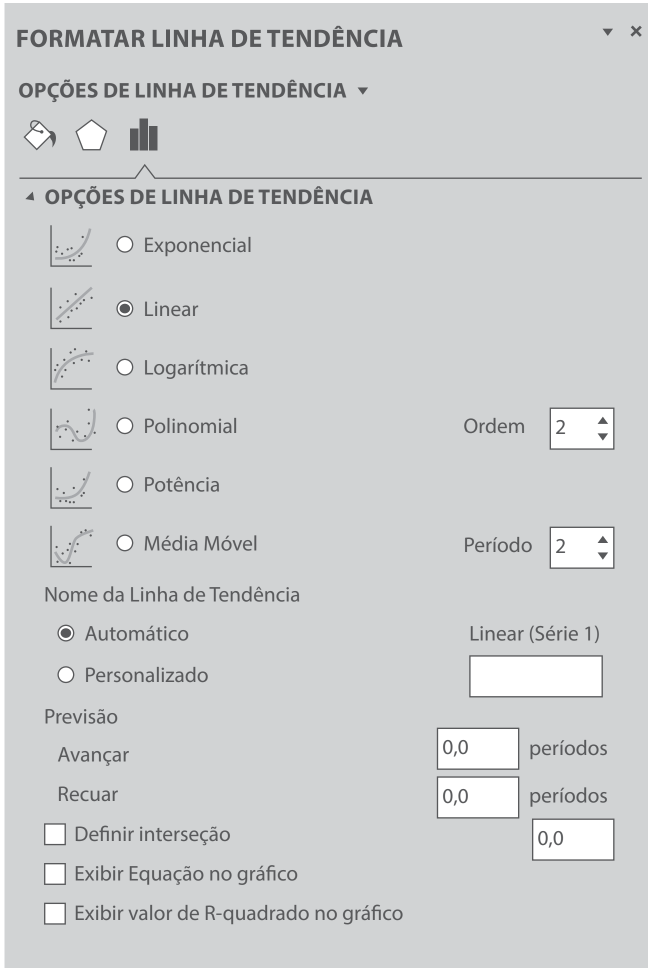
Segundo o engenheiro Katsuhiko Ogata, autor de diversas obras sobre sistemas de controle:

> Um modelo matemático de um sistema dinâmico é definido como um conjunto de equações que representam com precisão a dinâmica do sistema ou pelo menos bastante bem. Tenha em mente que um modelo matemático não é exclusivo para um determinado sistema. Um sistema pode ser representado de muitas formas diferentes, para que possa ter diversos modelos matemáticos, dependendo da perspectiva.

O uso desses modelos matemáticos ganhou grande impulso com o processamento digital de dados (variáveis) realizado pelos computadores, gerando gráficos, tabelas e simulações que acabaram por apoiar as melhores decisões de técnicos e analistas ao analisarem os sistemas modelados que representam os sistemas reais.

Atualmente, até mesmo explosões nucleares são realizadas por meios de modelos matemáticos em processamentos digitais, sem a necessidade de experiências de campo. Nota-se, ainda, que os usos desses modelos se aplicam a inúmeras outras áreas de conhecimento, como economia, finanças, análise de riscos, produção, administração etc. Isso é o que veremos na sequência deste capítulo.

NOTA: Como foi dito acima, o uso de ferramentas computacionais é cada vez mais frequente nas análises modernas dos problemas. Uma dessas ferramentas que se destacam nas rotinas diárias dos escritórios são as planilhas eletrônicas (Excel), nas quais a geração de gráficos a partir de tabelas é um recurso básico e de simples utilização. Entre as opções disponíveis, está a construção a partir do gráfico já pronto da “linha de tendência”. Ao selecioná-lo, o usuário pode escolher diversos modelos matemáticos para representar o padrão dos seus dados e, assim, facilitar seu estudo e análise. Veja a tela a seguir:



Nas opções na parte de baixo do quadro, destaca-se: "Exibir Equação no gráfico", que permite que seja visualizada a equação da linha de tendência, que é aquela que mais se aproxima dos pontos apresentados para a construção do gráfico e que segue alguns modelos já estudados neste livro.

Desejamos que você aproveite ao máximo esta experiência e que a leitura desta obra promova uma oportunidade de reflexão sobre os conteúdos abordados, contribuindo efetivamente para o seu enriquecimento cultural e acadêmico..

SOBRE OS AUTORES

André Ladeira é mestre graduado em Engenharia Elétrica pelas Faculdades Reunidas Nuno Lisboa – FRNL, mestre em Educação pela Universidade Católica de Petrópolis – UCP e especialista em Sistemas de Controle pelo Instituto Militar de Engenharia – IME, com MBA em Administração Acadêmica e Universitária pela Fundação Pedro Leopoldo – FPL. Atua como professor universitário há 32 anos. Atualmente, é professor do Programa de Educação a Distância da Fundação Getúlio Vargas – FGV OnLine, coordenador geral da EAD da UVA-RJ, professor-tutor e professor-conteudista da UVA-RJ, consultor e palestrante sobre tecnologias educacionais e finanças e sócio-diretor da GeoConhecimento Empreendimentos.

Roberta Fernandes Mendiondo Nunes é licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS e mestre em Engenharia Ambiental pelo Instituto Federal Fluminense – IFF. Atualmente, é professora de graduação presencial, pesquisadora, professora-tutora e professora-conteudista da UVA nos cursos de Pedagogia, Engenharias, Administração de Empresas e Ciências Contábeis, atuando principalmente nos seguintes temas: ensino de matemática nos cursos de engenharia e administração e métodos matemáticos no contexto de gestão.

Alcindo Marcio Santos de Miranda é mestre em Educação Matemática pela Universidade Santa Úrsula – USU, professor do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca – Cefet-RJ e da Universidade Veiga de Almeida – UVA há 27 anos e coordenador e tutor do curso de pós-graduação em Metodologia do Ensino de Matemática, na modalidade a distância (EAD), na Universidade Estácio de Sá – Unesa.

Edézio Pantoja Sacramento (*in memorian*): bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ (1990), graduado (licenciatura) em Matemática e mestre em Matemática também pela UFRJ (1995), doutor em Engenharia de Sistemas e Computação pelo Instituto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia - COPPE/UFRJ (1995). Foi professor adjunto da Universidade Veiga de Almeida - UVA.

Todas as coisas são números.

Pitágoras.

CAPÍTULO 1
MODELO LINEAR
(POR ALCINDO MIRANDA)

Este capítulo desenvolve uma fundamentação técnica e teórica capaz de proporcionar uma sólida e intuitiva compreensão dos conceitos básicos de que os estudantes necessitam para uma carreira na área de gestão e finanças. Serão abordados aspectos relativos às funções mais usuais dentro da economia, com ênfase em aplicações e abordagem voltadas para resolução de problemas de cunho prático. Segundo Benjamin Franklin, um dos líderes da Revolução Americana, investir em conhecimento rende sempre os melhores juros. Assim, leia com atenção e tente contextualizar suas experiências pessoais e profissionais com os exemplos citados neste capítulo.

FUNÇÕES COMO MODELOS MATEMÁTICOS E O EXCEL

Em muitas situações de cunho prático, o valor de uma grandeza varia de acordo com o valor de uma segunda grandeza. Essas grandezas são denominadas variáveis. Por exemplo, a quantidade de carne vendida pode depender do seu preço de venda, ou o preço de venda de uma garrafa de vinho pode depender do ano em que o vinho foi fabricado. Relações como essas muitas vezes podem ser representadas matematicamente por meio de funções.

Consideremos uma fábrica que produz um determinado artigo e que pretenda realizar uma análise matemática do custo dessa produção.

A tabela a seguir mostra o custo de produção de x unidades.

Número de unidades produzidas (x)	Custo em reais (y)
0	1.000
2	1.005
4	1.012
6	1.021
8	1.032
10	1.045

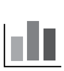
A função acima está representada sob a forma de uma tabela. O número de unidades produzidas foi representado por (x), e o custo de produção dessas x unidades foi representada por (y). Dizemos que y varia em função de x e, por esse fato, podemos usar a notação y = f(x). Como y nesse caso representa o custo de produção de x unidades, é conveniente usarmos y = C(x). Assim o custo de produção de oito unidades é de R$ 1.032,00. Matematicamente, essa informação é representada por C(8) = 1.032. Dizemos que y = 1.032 é a imagem do elemento x = 8. O conjunto dos valores de x observados é denominado domínio da função, e o conjunto de valores de y é denominado conjunto imagem.

Uma **função** pode ser representada por meio de uma equação que relaciona as variáveis envolvidas no fato que estiver sendo analisado. Essa equação é denominada modelo matemático. Uma ferramenta utilizada para obtenção de um modelo matemático é a planilha eletrônica (Excel), pelo algoritmo descrito a seguir:

Algoritmo para obtenção de um modelo matemático no Excel

1. Digitar as duas colunas (número de unidades produzidas e custo de produção), com os respectivos dados da tabela acima, nas colunas A e B da planilha do Excel.

2. Selecionar os dados digitados nessas colunas, incluindo os títulos das colunas, e selecionar o assistente gráfico (por meio da [*Barra de ferramentas*] ou do comando [*Inserir*]).

 → Símbolo do [*Assistente gráfico]* no Excel.

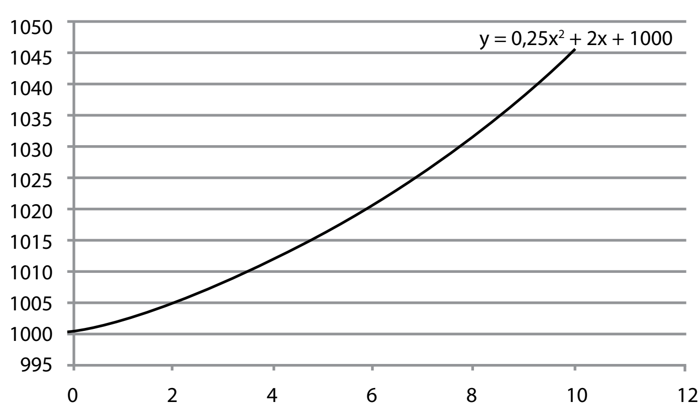
3. Optar pelo gráfico do tipo **dispersão** (XY), escolher o terceiro subtipo e finalizar o gráfico, clicando em [*Concluir*].

4. Clicar com o mouse sobre a linha do gráfico; aparecem, em seguida, quadrados amarelos sobre a curva que representa o gráfico.

5. Com o botão direito do mouse, clicar sobre um dos quadrados amarelos e escolher a opção [*Adicionar linha de tendência*]; escolher um dos modelos sugeridos (*linear, polinomial, exponencial etc.*), de acordo com as características do traçado da curva.

Nesse caso, escolha [Polinomial] de grau 2 (no campo [Ordem]), visto que o gráfico da função é um arco de uma parábola.

6. Na aba [*Opções*], selecionar [*Exibir equação no gráfico*] e, depois, clicar em [*OK*], para finalizar.



A lei funcional (função) obtida é $y = 0{,}25x^2 + 2x + 1.000$ ou, representando y como C(x), temos:

$$C(x) = 0{,}25x^2 + 2x + 1.000$$

O fato de conhecermos a lei funcional $C(x) = 0{,}25x^2 + 2x + 1.000$ permite responder a algumas questões relevantes para a situação abordada. Vamos ilustrar a seguir:

Problema 1: considerando a função custo em reais referente à produção de x unidades de um artigo denotada por $C(x) = 0{,}25x^2 + 2x + 1.000$

a) Qual o custo de produção de nove unidades?
Basta calcular **C(9)**, ou seja, na equação $\mathbf{C(x) = 0{,}25x^2 + 2x + 1.000}$, substituir o **x** por **9.**

Assim sendo, temos;

$$\mathbf{C(9) = 0{,}25 \,.\, (9)^2 + 2 \,.\, (9) + 1.000 = 1.038{,}25}$$

Assim, o custo de fabricação de nove unidades desse artigo é de **R$ 1.038,25.**

b) Qual o custo de fabricação da 10ª unidade?
Nesse caso, pretendemos estabelecer o custo específico da décima unidade, que corresponde a **C(10) – C(9)**, ou seja, o **custo de produção de 10 unidades menos o custo de produção de nove unidades**.

Aplicando-se o mesmo procedimento que acabamos de aprender, calculamos o custo de 10 unidades e obtemos:

$$\mathbf{C(10) = 0{,}25\ .\ (10)^2 + 2\ .\ (10) + 1.000 = 1.045}$$

Finalmente, podemos definir o **custo da 10ª unidade:**

$$\mathbf{C(10) - C(9) = 1.045 - 1.038{,}25 = 6{,}75}$$

Portanto, a 10ª unidade custará **R$ 6,75.**

c) Qual o custo fixo de produção desse artigo?

O custo fixo representa despesas que a empresa tem independentemente do número de unidades produzidas, como aluguel, salários de funcionários que não estão ligados diretamente ao custo de produção etc. Para obtermos o custo fixo, devemos calcular o valor de y quando x = 0, ou seja, o custo fixo é dado por C(0). Assim, o custo fixo, nesse caso, é C(0) = 1.000, ou seja, o custo fixo de produção desse artigo é de R$ 1.000,00.

d) Qual o custo médio de fabricação da décima unidade?

O custo médio de x unidades [CM(X)] é dado pelo quociente entre o custo de produção de x unidades e o número de unidades produzidas x, ou seja:

$$CM(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Logo, temos $CM(10) = \dfrac{C(10)}{10} = \dfrac{1.045}{10} = 10{,}45$

Isso significa que cada uma das 10 unidades teve um custo de fabricação igual a R$ 10,40, que difere do custo específico da 10ª unidade, que foi de R$ 6,75, obtido no item b.

Taxa de variação média – TVM de uma função

Dada uma função **y = f(x)**, dizemos que a taxa de variação média dessa função, quando **x** varia de $\mathbf{x_1}$ até $\mathbf{x_2}$**,** é dada pela seguinte razão:

$$TVM = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Considere o exemplo a seguir.

Problema 2: suponha que o custo de produção (em reais) de x máquinas é dado pela lei funcional:

$$\mathbf{C(x) = 30x^2 + 100x + 5.000}$$

Determinar:

a) A TVM do custo de produção quando x varia de **50 unidades** produzidas para **60 unidades** produzidas.

A TVM solicitada é dada por

$$TVM = \frac{C(60) - C(50)}{60 - 50}$$

O primeiro passo é calcular o custo de produção de 60 unidades, **C(60)**:

$$C(60) = 30 \,.\, (60)^2 + 100 \,.\, (60) + 5.000 = 119.000$$

Agora, é preciso calcular o custo de produção de 50 unidades, **C(50)**:

$$C(50) = 30 \,.\, (50)^2 + 100 \,.\, (50) + 5.000 = 85.000$$

Assim, temos que a **TVM** solicitada é:

$$TVM = \frac{C(60) - C(50)}{60 - 50} = \frac{119.000 - 85.000}{10} =$$

$$\frac{34.000}{10} = 3.400 \text{ reais/unidade}$$

Isso significa que, quando aumentamos a produção de 50 para 60 unidades, cada uma das 10 unidades acrescentadas, custará, em média, para a empresa, R$ 3.400,00.

b) A TVM do custo de produção quando x varia de **60 unidades** produzidas para **70 unidades** produzidas.

$$TVM = \frac{C(70) - C(60)}{70 - 60} = \frac{159.000 - 119.000}{10} =$$

$$\frac{40.000}{10} = 4.000 \text{ reais/unidade}$$

c) O custo de fabricação da 71ª unidade.

$$C(71) - C(70) = 163.330 - 159.000 = 4.330$$

Ou seja, o custo de fabricação da 71ª unidade é de R$ 4.330,00.

Observe a importância de estimar esses valores. O custo específico de produção da 71ª unidade, R$ 4.330,00, é maior que o custo médio de produção observado no intervalo de variação referente à produção de 60 a 70 unidades, que foi de R$ 4.000,00 por unidade. Esse fato, na prática, possibilita ao usuário dessa ferramenta decidir se vale ou não a pena realizar a produção da unidade subsequente, que, no caso, foi a 71ª.

d) A TVM do custo de produção quando x varia de **70 unidades** produzidas para **71 unidades** produzidas.

$$TVM = \frac{C(71) - C(70)}{71 - 70} = \frac{163.330 - 159.000}{1} =$$

4.330 reais/unidade

Observamos que o valor acima coincide com o custo específico de produção da 71ª unidade.

e) A TVM do custo de produção quando x varia de **0 unidades** produzidas para **70 unidade**s produzidas.

$$TVM = \frac{C(71) - C(0)}{71 - 0} = \frac{159.000 - 5.000}{70} =$$

2.200 reais/unidade

f) O custo médio de fabricação de 70 unidades.

O custo médio de x unidades é dado por:

$$CM(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Assim, temos:

$$CM(70) = \frac{C(70)}{70} = \frac{159.000}{70} = 2.271{,}43 \text{ reais/unidade}$$

Observe que o valor do custo médio de produção de 70 unidades, R$ 2.271,43 por unidade, difere do valor da TVM do custo de produção das 70 primeiras unidades, que foi de R$ 2.200,00 por unidade, calculado no item (e). Esse fato ocorre porque, no cálculo da TVM, foi levado em consideração o valor do custo fixo, o que não foi registrado no custo médio.

Problema 3: uma empresa que fabrica e vende um determinado produto registrou o número de unidades vendidas (x) e o preço unitário (p) desse produto nos últimos quatro meses na tabela abaixo:

Mês	Número de unidades vendidas (x)	Preço unitário de venda em reais (p)
Janeiro	40	169,87
Fevereiro	50	121,31
Março	70	99,32
Abril	80	89,87

Tomando como referência a taxa de variação entre o número de unidades vendidas em relação ao preço unitário de vendas, podemos afirmar que, no período de janeiro a abril, registrou-se:

a) Um acréscimo de uma unidade vendida por cada real diminuído no preço.

b) Um decréscimo de uma unidade vendida por cada real diminuído no preço.

c) Um acréscimo de uma unidade vendida por cada dois reais diminuídos no preço.

d) Um decréscimo de duas unidades vendidas por cada dois reais diminuídos no preço.

Solução:

Calculando a taxa de variação entre o número de unidades vendidas em relação ao preço unitário de venda no período de janeiro a abril, temos:

$$TVM = \frac{\textit{variação do número de unidades vendidas}}{\textit{variação no preço unitário de venda}}$$

$$TVM = \frac{80 - 40}{89{,}87 - 169{,}87} = \frac{40}{-80} = \frac{1}{-2} = \text{unidade/reais}$$

O resultado corresponde a um acréscimo de uma unidade vendida para cada dois reais diminuídos no preço, ou seja, a opção (c) está correta.

Observe que a fração corresponde a um decréscimo de uma unidade vendida para cada dois reais acrescidos no preço:

$$\frac{1}{-2}\ \text{unidade/reais} = \frac{-1}{2}\ \text{unidade/reais}$$

FUNÇÕES USUAIS EM ECONOMIA

Até o momento, ilustramos nossos exemplos utilizando uma função econômica denominada função custo. Existem várias outras funções associadas à comercialização de um produto. Vamos elencar algumas delas:

- **Função demanda:** modelo matemático que associa o preço unitário de venda (p) ao número de unidades vendidas, ou seja, demandadas (x).
- **Função oferta:** modelo matemático que associa o preço unitário (p) estabelecido na expectativa de se obter uma venda de x unidades que se disponibiliza no mercado.
- **Função receita:** denotada por R(x), é obtida com a venda de x unidades do produto ao preço unitário de venda (p). R(x) é dada pela expressão:

R(x) = (número de unidades vendidas) . (preço unitário de venda)

Ou

$$R(x) = x \cdot p$$

- **Função custo:** conforme já vimos, é denotada por C(x) e representa o custo de produção de x unidades de um produto.

- **Função lucro:** denotada por L(x), representa o lucro obtido na venda de x unidades de um produto e é dada pela expressão:

$$L(x) = \text{receita} - \text{custo}$$

Ou

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

- As funções receita média RM(x) e lucro médio LM(x) decorrem do mesmo raciocínio desenvolvido na função custo médio ilustrada no problema 1, item (d). São dadas pelas expressões:

$$RM(x) = \frac{R(x)}{x} \quad \text{e} \quad LM(x) = \frac{L(x)}{x}$$

Problema 4: dados colhidos em uma pesquisa de mercado apontam que x milhares de consumidores comprarão uma determinada marca de cafeteira se o preço unitário de venda em reais for $p = -0{,}27x + 51$. Além disso, sabe-se que o custo de produção de x milhares de unidades em milhares de reais é $C(x) = 2{,}23x^2 + 3{,}5x + 85$.

a) Qual o preço de venda que deve ser colocado no produto para que tenhamos uma expectativa de obter 10.000 unidades vendidas?

Para obtermos 10.000 unidades vendidas, devemos usar x = 10 milhares. Logo, substituímos x = 10 na equação p = –0,27x + 51. Obtemos, então, p = –0,27(10) + 51 => p = –2,7 + 51 => p = 48,30, ou seja, o preço unitário de venda deverá ser de R$ 48,30.

b) Quantas unidades podemos esperar que sejam vendidas se cada cafeteira custar R$ 41,55?

Nesse caso, substituímos *p* = 41,55 na equação *p* = –0,27x + 51. Temos, então:

$$\mathbf{41{,}55 = -0{,}27x + 51 \Rightarrow 0{,}27x = 51 - 41{,}55 \Rightarrow}$$
$$\mathbf{0{,}27x = 9{,}45 \Rightarrow x = \frac{9{,}45}{0{,}27} \Rightarrow x = 35}$$

Podemos esperar que sejam vendidas 35.000 unidades caso o preço unitário de venda seja R$ 41,55.

c) Qual a receita a ser obtida com a venda de 10.000 unidades?

L(x) = receita – custo

R(x) = (número de unidades vendidas) . (preço unitário de venda)

R(10) = (10) . (48,30) = 483 => x1.000 => 483.000 => R$ 483.000,00

d) Qual o custo de produção de 10.000 unidades?

$C(x) = 2{,}23x^2 + 3{,}5x + 85 \Rightarrow C(10) = 2{,}23(10)^2$
$+ 3{,}5(10) + 85 \Rightarrow 343 \Rightarrow x1.000$
$\rightarrow$ **343.000 => R$ 343.000,00**

e) Qual o lucro na venda de 1.000 unidades?

L(x) = receita – custo
L(10) = R(10) – C(10)
→ L(10) = 483 – 343 = **14**
0 => x1.000 => 140.000

O lucro na venda de 1.000 unidades deverá ser de R$ 140.000,00.

f) Obtenha a função receita.

$R(x) = x \cdot p$
Como $p = -0{,}27x + 51 \Rightarrow R(x) = x \cdot (-0{,}27x$
$+ 51) \Rightarrow R(x) = -0{,}27x^2 + 51x$

g) Obtenha a função lucro.

L(x) = receita – custo
L(x) = R(x) – C(x)
$L(x) = (-0{,}27x^2 + 51x) - (2{,}23x^2 + 3{,}5x + 85)$

$$L(x) = -0{,}27x^2 + 51x - 2{,}23x^2 - 3{,}5x - 85)$$
$$L(x) = -2{,}5x^2 + 47{,}5x - 85$$

h) Utilize a função obtida no item (g) para obter o lucro referente à venda de 10.000 unidades. Compare com o resultado obtido no item (e).

Devemos calcular L(10) na função $L(x) = -2{,}5x^2 + 47{,}5x - 85$.

Logo, temos: $L(10) = -2{,}5(10)^2 + 47{,}5(10) - 85$
$\Rightarrow L(10) = 140 \Rightarrow x10.000$
$\rightarrow$ 140.000, ou seja, R$ 140.000,00, que consiste no mesmo valor obtido no item (e).

i) Calcule o lucro médio por unidade na venda de 10.000 unidades.

$$LM(x) = \frac{L(x)}{x} \Rightarrow LM(10) = \frac{L(10)}{10} = \frac{140}{10} = 14 \text{ reais/unidade}$$

j) Encontre a função lucro médio. Utilize essa função para resolver o item (i).

$$LM(x) = \frac{L(x)}{x} \Rightarrow LM(x) = \frac{-2{,}5x^2 + 47{,}5x - 85}{x}$$

Essa função pode ainda ser representada da seguinte forma:

$$LM(x) = \frac{-2,5x^2}{x} + \frac{47,5x}{x} - \frac{85}{x} \Rightarrow LM(x) = -2,5x + 47,5 - \frac{85}{x}$$

Usando x = 10 na equação acima, temos:

$$LM(x) = -2,5(10) + 47,5 - \frac{85}{10} = -25 + 47,5 - 8,5 = 14$$

Que consiste no mesmo valor obtido no item (i), ou seja, R$ 14,00 por unidade.

Alguns modelos econômicos podem ser descritos utilizando-se funções quando pelo menos uma das variáveis é informada em termos percentuais. Esse fato aponta a necessidade de revermos algumas operações envolvendo esse conteúdo. O próximo problema descreve uma situação de cunho prático que ilustra esse fato.

Problema 5: suponha que o número de funcionários necessários para distribuir catálogos telefônicos para x% das residências em certa região rural seja dado pela função:

$$N(x) = \frac{600x}{300 - x}$$

a) Qual o domínio dessa função?

O domínio consiste no conjunto de valores que podem ser substituídos no lugar de x.

Observe que, matematicamente, x não pode ser igual a 300, tendo em vista que esse valor torna o denominador (300 – x) dessa função igual a zero. Assim, o domínio dessa função consiste em todos os números reais diferentes de 300. O domínio pode ser informado também da seguinte forma:

$$D(N) = \{x \in R\}, \text{ em que } x \neq 300$$

b) Para que valores de x a função N(x) tem significado nesse contexto?

Todos os números reais x do intervalo ≤ x ≤100.

c) Quantos funcionários são necessários para distribuir catálogos para 50% das residências?

Neste caso, 50% => x = 50. Substituindo x = 50 na função dada. temos:

$$N(10) = \frac{600(50)}{300 - 50} = \frac{3.000}{250} = 120 \text{ residências}$$

d) Quantos funcionários são necessários para distribuir catálogos para todas as residências?

Nesse caso, devemos atender 100% das residências, ou seja, x = 100.

Substituindo x = 100 na função dada, temos:

$$N(100) = \frac{600(100)}{300 - 100} = \frac{60.000}{200} = 300 \text{ residências}$$

e) Que porcentagem das residências terá recebido catálogos novos depois da utilização de 150 funcionários?

Na equação $N(100) = \dfrac{600(x)}{300 - x}$, substituímos N(x) por 150.

$$150 = \frac{600(x)}{300 - x} \Rightarrow 600x = 150 \ . \ (300 - x) \Rightarrow$$

$$600x = 45.000 - 150x \Rightarrow 600x + 150x = 45.000 \Rightarrow$$

$$750x = 45.000 \Rightarrow x = \frac{45.000}{750} \Rightarrow x = 60$$

Logo, 60% das residências terão recebido os novos catálogos.

f) Supondo que a região possua um total de 500 residências, quantas foram atendidas depois da utilização de 150 funcionários?

Como vimos no item (e), após a utilização de 150 funcionários, 60% das residências serão atendidas. Devemos, então, calcular 60% de 500. Ou seja:

$$60\% \text{ de } 500 = \frac{60}{100} x500 = 300$$

Ou seja, serão atendidas 300 residências.

g) Supondo que a região possua um total de 500 residências, quantos funcionários deverão ser designados para atender a uma demanda de 400 residências?

Nesse caso, devemos inicialmente calcular o percentual que representa os 400 em relação ao total de residências, que é 500. Ou seja:

$$\frac{400}{500} = 0{,}8 \Rightarrow (100\%) \Rightarrow 80\% \Rightarrow x = 80$$

Substituindo $x = 80$ na equação $N(x) = \dfrac{600x}{300 - x}$, temos:

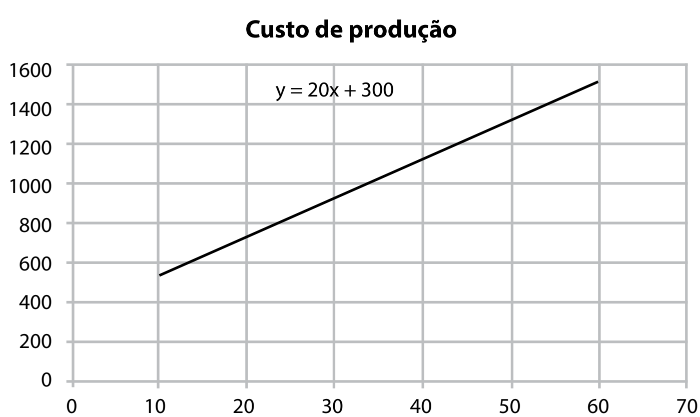
$$N(80) = \frac{600 \,.\, (80)}{300 - 80} = \frac{4.800}{220} \cong 22 \text{ funcionários}$$

O MODELO LINEAR

A tabela a seguir representa o custo de produção de molduras de quadros.

Número de unidades produzidas (x)	**Custo de produção em reais (y)**
10	500
20	700
30	900
40	1.100
50	1.300
60	1.500

Com utilização do algoritmo para obtenção de um modelo matemático no Excel (escolhendo-se a opção linear após adicionar linha de tendência, visto que o gráfico é uma reta), podemos traçar o gráfico do custo de produção (y) em função do número de unidades vendidas (x), além de encontrar a lei funcional representativa da referida tabela.



Observamos que a equação obtida para a reta que representa o gráfico da função é y = 20x + 300. Utilizando-se a notação y = C(x), podemos, então, escrever que o custo de produção de x unidades é dado pela função C(x)= 20x + 300. Diante desse contexto, vamos resolver o seguinte exercício:

Problema 6: considere a tabela apresentada abaixo, que representa o custo de produção de molduras de quadros:

Número de unidades produzidas (x)	Custo de produção em reais (y)
10	500
20	700
30	900
40	1.100
50	1.300
60	1.500

a) Calcule a TVM do custo de produção quando **x** varia de **50 unidades** produzidas para **60 unidades** produzidas.

$$TVM = \frac{\text{variação do custo}}{\text{variação do número de unidades produzidas}}$$

$$TVM = \frac{1.500 - 1.300}{60 - 50} = \frac{200}{10} = 20$$

$$TVM = 20 \text{ reais/unidade}$$

b) Calcule a TVM do custo de produção quando x varia de **10 unidades** produzidas para **50 unidades** produzidas.

$$TVM = \frac{\textit{variação do custo}}{\textit{variação do número de unidades produzidas}}$$

$$TVM = \frac{1.500 - 1.300}{60 - 50} = \frac{200}{10} = 20$$

$$TVM = 20 \text{ reais/unidade}$$

c) Calcule a TVM do custo de produção quando x varia de **20 unidades** produzidas para **60 unidades** produzidas.

$$TVM = \frac{\textit{variação do custo}}{\textit{variação do número de unidades produzidas}}$$

$$TVM = \frac{1.500 - 700}{60 - 20} = \frac{800}{40} = 20$$

$$TVM = 20 \text{ reais/unidade}$$

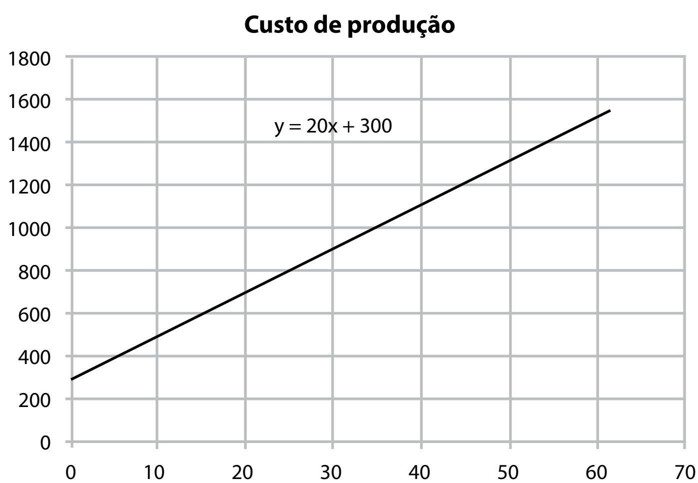
d) Qual o custo fixo de produção desse artigo?

C(0) = 300 => Custo fixo => R$ 300,00

Como podemos observar, em todos os itens encontramos o mesmo resultado. Como vimos, o gráfico dessa função C(x) = 30x + 200 é uma reta, e sua taxa de variação em qualquer intervalo de produção é de R$ 30,00 por unidade, ou seja, dizemos que a taxa de variação do custo de produção é constante e igual a R$ 30,00 por unidade, o que pode ser descrito das seguintes formas: R$ 30,00/unidade ou 30 reais/unidade.

O fato de a TVM de uma função ser constante em qualquer intervalo caracteriza o modelo linear, e a equação da reta representativa desse modelo é da forma y = m . x + n. O valor de m corresponde à TVM da função que esse modelo representa, e o valor de m corresponde ao custo fixo igual a R$ 300,00, ou seja, quando x = 0, y = 300 (observe o valor no ponto em que a reta corta o eixo vertical).

No ensino médio, é mais usual utilizarmos o termo função do 1º grau em vez de modelo linear.



Observe que, tanto na tabela quanto no gráfico, quanto maior o número de unidades produzidas, maior é o custo de produção. Isso aponta uma taxa de variação positiva (m = 30). Esse fato caracteriza uma função do 1º grau ou um modelo linear crescente.

Problema 7: uma indústria implantou um programa de prevenção de acidentes de trabalho. Antes da implantação desse programa, o numero anual de acidentes desse tipo era 38. Após a implantação do referido programa, esse número caiu em média de quatro acidentes por ano durante os primeiros três anos de implantação. Nesse contexto, pede-se:

a) A lei funcional (modelo matemático) que relaciona o número de acidentes (y) e o tempo de implantação em anos (t) desse programa.

Vamos apresentar duas maneiras de resolver esse problema:

Primeira maneira

- Vamos construir uma tabela de valores para t e y:

Observe que o texto informa que, quando t = 0, y = 38. O valor de y diminui em quatro unidades após cada ano de implantação. Assim, temos:

t	y
0	38
1	34
2	30
3	26

- Como a taxa de variação é constante, trata-se de um modelo linear em que y = m . t + n. Podemos calcular m escolhendo um período qualquer para o intervalo de tempo, por exemplo, entre t = 0 e t = 3. Assim, temos:

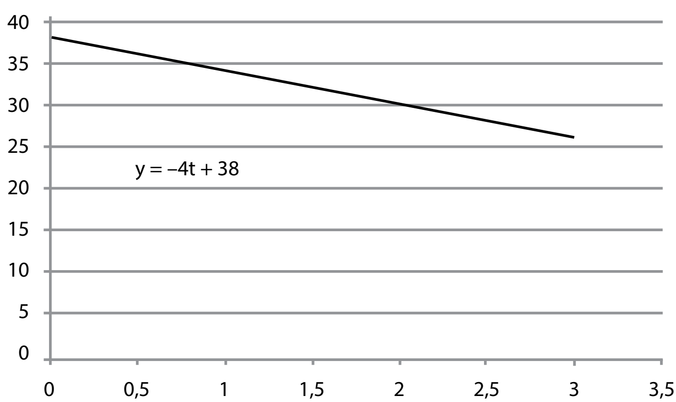
$$m = \frac{\textit{variação do número de acidentes } y}{\textit{variação do tempo } t}$$

$$\frac{26 - 38}{3 - 0} = \frac{-12}{3} = -4 \text{ acidentes/ano}$$

- n = 38, pois corresponde ao valor de y quando t = 0. Assim, a lei funcional solicitada é y = –4t + 38 ou y = 38 – 4t

Segunda maneira

Considerando a tabela elaborada na primeira maneira, podemos aplicar o algoritmo para obtenção de um modelo matemático no Excel.



O Excel informará y = –4x + 38. Basta trocar x por t.

Observe que, tanto na tabela quanto no gráfico, quanto maior o tempo (t) de implantação do programa de prevenção de acidentes de trabalho, menor é o número de acidentes. Isso aponta uma taxa de variação negativa (m = –4). Esse fato caracteriza uma função do 1º grau decrescente ou um modelo linear decrescente.

b) Quanto tempo levará para essa indústria erradicar os acidentes de trabalho?

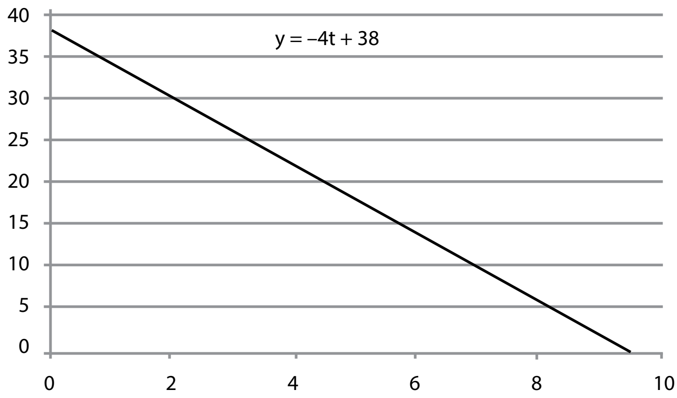
Erradicar os acidentes de trabalho corresponde a considerar que y = 0 na função $y = -4t + 38$. Assim, temos:

$$y = -4t + 38 \Rightarrow 0 = -4t + 38 \Rightarrow t = \frac{38}{4} = 9{,}5 \Rightarrow$$

$t = 9{,}5$, ou seja, daqui a nove anos e seis meses.

Vamos inserir esse resultado na tabela desenvolvida nesse problema para visualizar sua interpretação gráfica:

t	y
0	38
1	34
2	30
3	26
9,5	0



Podemos observar que o gráfico corta o eixo vertical em $y = 38$ (valor de n, ou seja, valor de y quando $t = 0$) e corta o eixo horizontal em $t = 9{,}5$ (valor de t quando $y = 0$). Este valor, $t = 9{,}5$, é denominado raiz da função.

Para encontrarmos a raiz de uma função, basta colocarmos $y = 0$ e resolvermos a equação obtida.

O modelo linear para as funções demanda e oferta

- **Função demanda:** modelo matemático que associa o preço unitário de venda (p) ao número de unidades vendidas, ou seja, demandadas (x). No caso, vamos abordar o modelo linear na forma $p = m \cdot x + n$.

Problema 8: uma loja vende oito unidades de certo tipo de meia quando o seu preço unitário de venda é R$ 13,80. Quando esse preço cai para R$ 4,80, registra-se um número de 14 unidades vendidas. Considerando o modelo linear:

a) Encontre a taxa de variação da função de demanda e interprete o seu resultado.

Montemos uma tabela:

p	x
15,60	8
4,80	14

Cálculo de *m*:

$$m = \frac{\textit{variação do preço}}{\textit{variação do número de unidades vendidas}}$$

$$\frac{4{,}80 - 15{,}60}{14 - 8} = \frac{-10{,}80}{6} = -1{,}80$$

$m = -1{,}80$ reais/unidade

Para cada R$ 1,80 diminuídos no preço, temos uma unidade a mais vendida.

b) Escreva a equação de demanda:

Já encontramos o valor de m = –1,8. Pela tabela, temos que, quando p = 4,80, o valor de x = 14.

Assim, substituindo na equação p = m . x + n, teremos:

$$4{,}80 = -1{,}8 \cdot (14) + n \Rightarrow -25{,}2 + n = 4{,}80$$
$$\Rightarrow n = 4{,}80 + 25{,}2 \Rightarrow n = 30$$

Concluímos que a equação solicitada é p = –1,8x + 30.

O exemplo anterior ilustra um procedimento algébrico para determinação de um modelo linear (equação da reta). Ilustraremos a seguir mais um exemplo desse tipo, contemplando uma função usual em economia denominada função oferta.

- **Função oferta:** modelo matemático que associa o preço unitário (p) estabelecido na expectativa de se obter uma venda de x unidades que se disponibiliza no mercado. Lembre-se de que no modelo linear essa equação é da forma p = m . x + n.

Problema 9: consideremos que a mesma loja do problema 8 resolva oferecer uma promoção para quantidades vendidas que não excedam sua capacidade de produção. Ao preço unitário de venda igual a R$ 11,60, serão disponibilizados no mercado oito unidades para venda e, em seguida, ao preço unitário de R$ 14,00, a quantidade disponibilizada passará para 20 unidades para venda.

a) Encontre a taxa de variação da função de oferta e interprete o seu resultado.

Montemos uma tabela:

p	x
11,60	8
14	20

$$m = \frac{\textit{variação do preço}}{\textit{variação do número de unidades vendidas}}$$

$$\frac{14 - 11{,}60}{20 - 8} = \frac{2{,}4}{12} = 0{,}20$$

$$m = -0{,}20 \text{ reais/unidade}$$

Para cada R$ 0,20 acrescidos no
preço, temos uma unidade a mais vendida.

b) Escreva a equação de oferta:

Já encontramos o valor de m = 0,20. Pela tabela, temos que ,quando p = 14, o valor de x = 20.

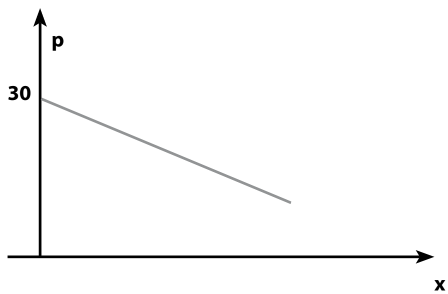
Assim, na equação p = m . x + n, teremos:

$$14 = 0{,}20 \,.\, (20) + n \Rightarrow n + 4 = 14{,}10$$
$$\Rightarrow n = 14 - 4 \Rightarrow n = 10$$

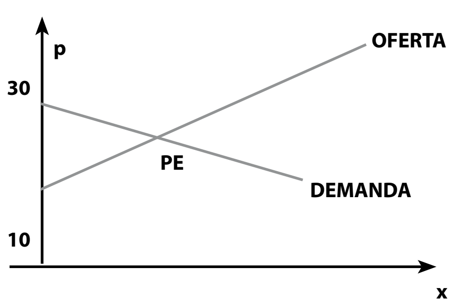
Concluímos que a equação solicitada é p = 0,20x + 10.

Observações:

- A equação de demanda p = –1,8x + 30 apresenta a taxa de variação negativa (–1,8) que corresponde ao coeficiente de x na equação considerada. Na tabela, observamos que a função demanda é decrescente. Assim, no modelo linear, se a taxa de variação é negativa, então a função representativa é decrescente. Observe o gráfico a seguir:



- A equação de oferta p = 0,20x + 10 apresenta a taxa de variação positiva (0,20) que corresponde ao coeficiente de x na equação considerada. Na tabela, observamos que a função oferta é crescente. Assim, no modelo linear, se a taxa de variação é positiva, então a função representativa é crescente. Observe o gráfico:



Para obtermos o ponto de equilíbrio – PE de mercado, basta igualarmos a equação de demanda com a equação de oferta.

Problema 10: calcular o ponto de equilíbrio da loja referente aos problemas 8 e 9, cuja equação de demanda é $p = -1,8x + 30$ e cuja equação de oferta é $p = 0,20x + 10$.

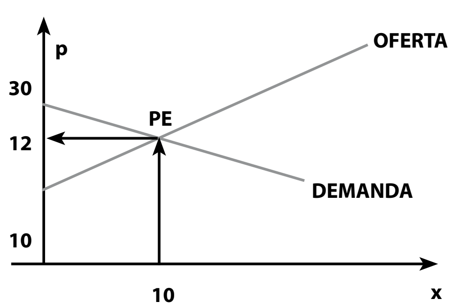
Para calcularmos o PE de mercado, igualamos a equação de demanda com a equação de oferta do produto em questão. Nos problemas 8 e 9, obtivemos a equação de demanda $p = -1,8x + 30$ e a equação de oferta $p = 0,20x + 10$. Igualando essas duas equações, teremos:

$$0,20x + 10 = -1,8x + 30$$

$$\mathbf{0,20x + 1,8x = 30 - 10}$$

$\mathbf{2x = 20 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow}$ escolhendo uma das equações consideradas para substituir o valor de $x = 10$ encontrado, temos:

$$p = 0,20x + 10 \Rightarrow p = 0,20(10) + 10 \Rightarrow p = 2 + 10 \Rightarrow p = 12$$



Concluímos que o PE de mercado é ($x = 10$ e $p = 12$), o que corresponde a dizer que, ao preço de R$ 12,00, teremos, matematicamente, a garantia de que as unidades ofertadas $x = 10$ serão vendidas. Podemos observar que, se o preço cobrado for maior que R$ 12,00, a quantidade ofertada será maior que a quantidade demandada (vendida). Existe, então, uma tendência para o preço da meia diminuir devido ao excedente da oferta. Por outro lado, se o preço for inferior a R$ 12,00, a quantidade demandada (vendida) será maior que a oferta, e esse excesso de demanda tende a fazer com que o preço aumente, convergindo em direção ao preço do PE.

- Os problemas 8 e 9 ilustram um procedimento algébrico para obtenção do modelo linear $y = m \cdot x + n$ (função do 1º grau – equação da reta) quando conhecemos dois pontos da reta. Resumindo o procedimento adotado, temos:

Procedimento para obtenção do modelo linear

Passo 1: tabelar os pontos fornecidos.

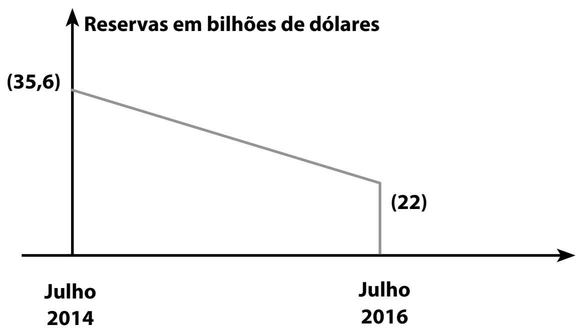
Passo 2: calcular a taxa de variação (m).

Passo 3: escolher um dos pontos fornecidos para calcular o intercepto no eixo vertical (n).

Vejamos mais um exemplo:

Problema 11: o gráfico abaixo representa, em bilhões de dólares, a queda das reservas internacionais de um determinado país no período de julho de 2014 a julho de 2016.

a) Qual a taxa de variação da queda das reservas no período considerado?



Vamos definir y com eixo vertical que corresponde ao valor das reservas em bilhões de dólares e x o eixo horizontal que corresponde ao ano. Para facilitar nossos cálculos utilizaremos x = 0 para o ano de 2014 e x = 2 para o ano de 2016. Dessa forma, temos em 2014 (x = 0) uma reserva de y = 35,6 bilhões de dólares e, em 2016 (x = 2), uma reserva de 22 bilhões de dólares. Assim, podemos tabelar os valores do gráfico da seguinte forma:

y	x
35,6	0
22	2

Logo, a taxa de variação da queda *m* será dada por:

$$m = \frac{\textit{variação da reserva y}}{\textit{variação do ano x}}$$

$$\frac{22 - 35{,}6}{2 - 0} = \frac{-13{,}6}{2} = -6{,}8 \text{ milhões de dólares/ano}$$

b) Calcule o total de reservas desse país, em bilhões de dólares, em julho de 2015.

Em julho de 2015, a reserva era de 35,6 bilhões de dólares. Como a taxa de variação da queda m é –6,8 bilhões de dólares por ano, subtraímos 6,8 de 35,6, obtendo 28,8 bilhões de dólares, que é o valor das reservas em 2015.

c) Encontre a equação da reta ilustrada no gráfico para projetar a época em que essas reservas se esgotarão, admitindo que a taxa de variação calculada permaneça inalterada nos próximos anos.

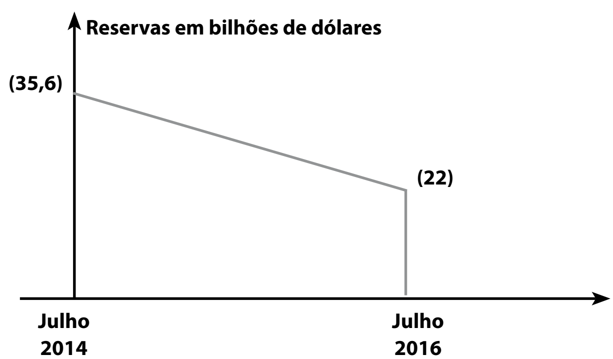
A equação da reta y = m . x + n pode ser obtida da seguinte forma:

- Cálculo de m: vimos no item (a) => m = –6,8.
- Temos que y = –6,8 . x + n.
- O valor de n pode ser obtido escolhendo-se um ponto (x, y) da tabela, por exemplo (2, 22), ou seja,

para x = 2, temos y = 22. Substituindo na equação y = –6,8 . x + n, vamos ter:

$$22 = -6,8 \,.\, (2) + n \Rightarrow 22 = -13,6 + n$$
$$\Rightarrow 22 + 13,6 = n \Rightarrow 35,6 = n \Rightarrow n = 35,6$$
$$\Rightarrow \text{A equação da reta é } y = -6,8x + 35,6.$$

Obs.: o valor de n = 35,6 poderia ser obtido direto no gráfico, por ser o corte no eixo vertical.



d) Vamos utilizar a equação y = –6,8x + 35,6 para projetar a época em que essas reservas se esgotarão, admitindo que a taxa de variação da queda m = –6,8 bilhões de dólares por ano permaneça inalterada nos próximos anos. O fato de as reservas se esgotarem corresponde a dizer que y = 0. Substituindo esse valor na equação y = –6,8x + 35,6, temos:

$$\Rightarrow 0 = -6,8 \,.\, x + 35,6 \Rightarrow 0 + 6,8 \,.\, x = 35,6 \Rightarrow 6,8 \,.\, x = 35,6 \Rightarrow$$

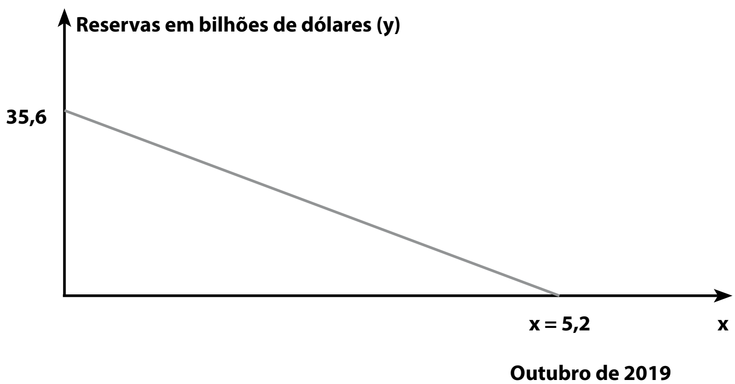
$$x = \frac{35,6}{6,8} \quad x \cong 5,2 \text{ (raiz da função } y = -6,8x + 35,6)$$

Isso significa que 5,2 anos após 2014 as reservas se esgotarão. Ou seja, 2014 + 5,2 = 2.019,2. Durante o ano de 2019, as reservas se esgotarão.

Mais precisamente, 0,2 anos corresponde a 0,2 . (12 meses) = 2,4 meses.

Como o mês de referência foi julho, teremos as reservas se esgotando em outubro de 2019.

e) Esboce um gráfico da função obtida indicando sua raiz.



Observe que 35,6 representa o corte no eixo vertical (y), enquanto x = 5,2 representa o corte no eixo horizontal (x).

O modelo linear para as funções custo, receita e lucro

Relembremos alguns conceitos já abordados:

- **Função receita:** denotada por R(x), é obtida com a venda de x unidades do produto ao preço unitário de venda (p). R(x) é dada pela expressão:

R(x) = (número de unidades
vendidas) . (preço unitário de venda)
Ou
R(x) = x . p

- **Função custo:** denotada por C(x), é o custo de produção de x unidades de um produto.

C(x) = custo fixo + custo variável por unidade

Na função custo, o custo fixo corresponde à soma dos custos que não dependem da quantidade produzida, tais como, aluguel, seguros, dentre outros. A parcela do custo que depende da quantidade produzida x é denominada custo variável.

- **Função lucro:** denotada por L(x), representa o lucro obtido na venda de x unidades de um produto e é dada pela expressão:

L(x) = receita – custo
Ou
L(x) = R(x) – C(x)

Problema 12: uma empresa vende um artigo cujo custo unitário é composto por R$ 6,00 (referente à matéria-prima) mais R$ 8,00 (referente à mão de obra direta). O custo fixo mensal é de R$ 2.500,00, e cada unidade desse artigo é vendida por R$ 25,00.

a) Qual o custo de produção de cinco unidades mensais?

O custo é dado por C(x) = custo fixo + custo variável por unidade.

O custo fixo é R$ 2.500,00.
O custo de cada unidade é composto por R$ 6,00 (referente à matéria-prima) mais R$ 8,00 (referente à mão de obra direta). Então, cada unidade custará R$ 14,00.

O custo de cinco unidades será:

C(5) = custo fixo + custo variável por unidade

$C(5) = 2.500 + 14 \cdot (5) \Rightarrow C(5) = 2.500 + 70$

$\Rightarrow C(5) = 2.570 \Rightarrow$ R$ 2.570,00

b) Qual o custo de produção de x unidades mensais?

C(x) = custo fixo + custo variável por unidade

$C(x) = 2.500 + 14 \cdot (x) \Rightarrow C(x) = 2.500 + 14 \cdot x$

c) Qual a função receita na venda de x unidades mensais?

R(x) = (número de unidades
vendidas) . (preço unitário de venda)
Ou
$R(x) = x \cdot p$

Como o preço de venda é R$ 25,00, teremos:

$R(x) = x \cdot (25) \Rightarrow R(x) = 25x$

d) Qual a função lucro na venda de x unidades mensais?

L(x) = receita – custo
Ou
$L(x) = R(x) - C(x)$

$L(x) = 25x - (2500 + 14 \cdot x)$
$\Rightarrow L(x) = 25x - 2500 - 14x$
$\Rightarrow L(x) = 11x - 2.500$

e) Quanto aumenta percentualmente o lucro se a venda aumentar de 1.000 para 1.500 unidades mensais?

Calculemos, inicialmente, o lucro para a venda de 1.000 unidades mensais e o lucro para venda de 1.500 unidades mensais:

$L(x) = 11x - 2.500$
$L(1.000) = 11 \cdot (10.000) - 25.000 =$ R$ 8.500,00.

$$L(1.500) = 11 \ . \ (1.500) - 2.500 = R\$ \ 14.000{,}00.$$

O acréscimo em reais é R$ 14.000,00 – R$ 8.500,00

=> R$ 5.500,00.

Devemos calcular qual o percentual que esse acréscimo (R$ 5.500,00) representa sobre R$ 8.500,00. Para isso, basta efetuarmos a seguinte operação:

$$\frac{5.500}{8.500} = 0{,}647 \ \Rightarrow . \ (100\%) \ \Rightarrow \ 64{,}7\%$$

Podemos concluir que, com um acréscimo de 50% na venda mensal (de 1.000 para 1.500 unidades), a empresa terá um acréscimo no lucro de 64,7%.

f) O que ocorrerá caso a empresa venda 200 unidades mensais?

$$L(x) = 11x - 2.500$$

$$L(200) = 11 \ . \ (200) - 25.000 = -R\$ \ 300{,}00.$$

Isso significa que a empresa terá
um prejuízo de R$ 300,00.

g) Qual a menor quantidade possível de venda de forma que a empresa não tenha prejuízo?

Nesse caso, devemos encontrar a quantidade vendida x que proporciona o lucro igual a zero. A empresa não teria lucro nem prejuízo. Resolvemos a equação L(x) = 0.

$\tilde{x}$ = 23 unidades (que corresponde à raiz da função lucro).

$$L(x) = 0 > 11x - 500 = 0 \Rightarrow 11x = 2.500 \Rightarrow x = \frac{2.500}{11} \Rightarrow$$

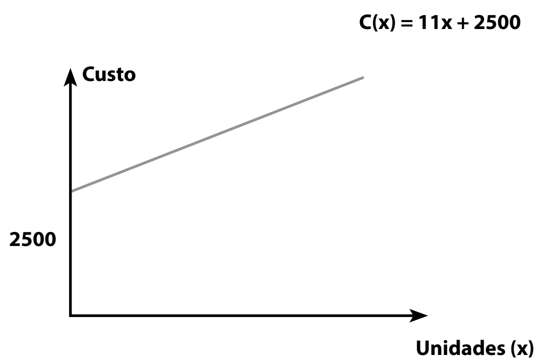
Obs.: esse valor encontrado, x = 23 unidades, é denominado ponto de nivelamento ou ponto crítico. Para sua obtenção, conforme foi ilustrado, resolvemos sua equação L(x) = 0. Tendo em vista que L(x) = receita – custo, podemos escrever:

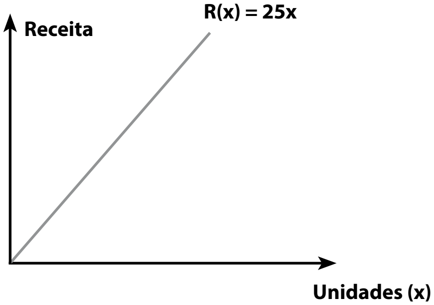
Receita – custo = 0 => receita = custo => R(x) = C(x)

Podemos obter o ponto crítico igualando a função receita à função custo.

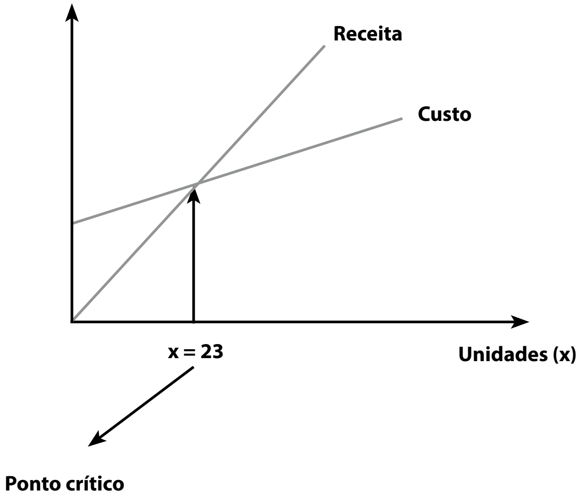
h) Esboce um gráfico do mesmo sistema de coordenadas: as funções custo e receita, indicando o ponto de nivelamento.

Vamos construir os gráficos inicialmente separados:





Representando os gráficos no mesmo sistema de coordenadas, temos:



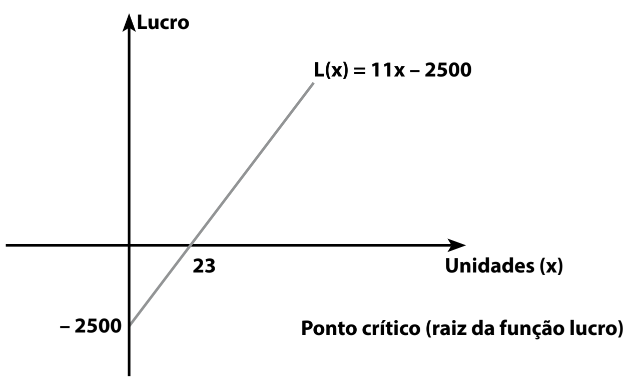
Considerações:

- Para valores de vendas maiores que x = 23, temos a receita mais alta do que o custo, ou seja, lucro positivo.
- Para valores de vendas menores que x = 23, temos a receita mais baixa do que o custo, ou seja, lucro negativo (prejuízo).

i) Faça um esboço do gráfico da função lucro.

Função lucro => $L(x) = 11x - 2.500$

Raiz da função lucro => $11x - 2.500 = 0 \Rightarrow x \cong 23$



Considerações:

- Para valores de vendas maiores que x = 23, teremos o lucro positivo.
- Para valores de vendas menores que x = 23, teremos o lucro negativo (prejuízo).

Essas considerações extraídas da função lucro consistem em um exercício denominado **estudo do sinal da função lucro.**

Problema 13: considere que as funções custo e receita de uma empresa para x unidades produzidas e vendidas sejam, respectivamente, R(x) = 200x e C(x) = 10.000 + 150x. Faça um estudo do sinal da função lucro dessa empresa.

- Obtenção da função lucro:

$$L(x) = \text{receita} - \text{custo}$$
$$L(x) = 200x - (10.000 + 150x)$$
$$\Rightarrow L(x) = 200x - 10.000 - 150x$$
$$L(x) = 50x - 10000$$

- Obtenção da raiz da função lucro (ponto crítico):

$$L(x) = 0 \Rightarrow 50x - 10.000 = 0$$
$$\Rightarrow 50x = 10.000 \Rightarrow x = 200 \text{ unidades}$$

- Esboço do gráfico da função lucro:

Considerações:

- Para valores de vendas maiores que x = 200, teremos o lucro positivo.

Simbolicamente: x > 200 => **L(x) > 0 (lucro positivo).**

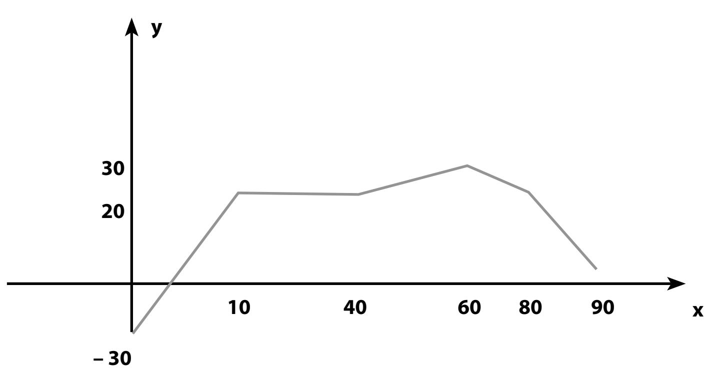
- Para valores de vendas menores que x = 200, teremos o lucro negativo (prejuízo).

Simbolicamente: x >< 200 => **L(x) < 0 (lucro negativo).**

Interpretação da taxa de variação (m) do modelo linear y = m . x + n como inclinação de uma reta

Como foi visto na resolução do **Problema 7**, no modelo linear, a taxa de variação (m) é constante. Em economia, muitas vezes necessitamos realizar a análise de gráficos que apresentam uma taxa de variação oscilante. Vamos recordar o cálculo da taxa de variação.

Problema 14: observe o gráfico e calcule a taxa de variação em cada intervalo solicitado.



a) Intervalo de x = 0 até x = 10.

Observe que a reta passa pelos pontos (0, –30) e (10, 20).

$$m = \frac{\textit{variação de y}}{\textit{variação de x}} = \frac{20 - (-30)}{10 - 0} = \frac{50}{10} = 5$$

b) Intervalo de x = 10 até x = 40.

Observe que a reta passa pelos pontos (10, 20) e (40, 20).

$$m = \frac{\textit{variação de y}}{\textit{variação de x}} = \frac{20 - 20}{10 - 0} = \frac{0}{10} = 0$$

c) Intervalo de x = 40 até x = 60.

Observe que a reta passa pelos pontos (40, 20) e (60, 30).

$$m = \frac{\textit{variação de y}}{\textit{variação de x}} = \frac{30 - 20}{60 - 40} = \frac{10}{20} = 0{,}5$$

d) Intervalo de x = 60 até x = 80.

Observe que a reta passa pelos pontos (60, 30) e (80, 20).

$$m = \frac{\textit{variação de y}}{\textit{variação de x}} = \frac{20 - 30}{80 - 60} = \frac{-10}{20} = -0{,}5$$

e) Intervalo de x = 80 até x = 90.

Observe que a reta passa pelos pontos (80, 20) e (90, 0).

$$m = \frac{\textit{variação de y}}{\textit{variação de x}} = \frac{0 - 20}{90 - 80} = \frac{-20}{10} = -2$$

Considerações:

A taxa de variação do modelo linear y = m . x + n também é conhecida como coeficiente angular da reta representativa desse modelo. O valor (n), que representa o corte no eixo vertical, é chamado de coeficiente linear dessa reta. Os cálculos dos coeficientes angulares ilustram alguns resultados importantes na análise gráfica:

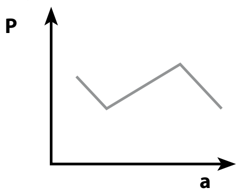
- Quanto maior a taxa de variação (ou o coeficiente angular da reta), maior é a inclinação dessa reta, conforme ilustram os itens (a), (c), (d) e (e). Observamos que o segmento mais inclinado é o representativo do item (a), seguido do (c), (e) e (d), nessa ordem.
- Se a taxa de variação (ou o coeficiente angular) é nula, ou seja, igual a zero, observamos que o segmento de reta representativo é paralelo ao eixo horizontal, conforme ilustra o item (b).

Problema 15: o quadro a seguirapresenta a produção de um artigo de uma cooperativa entre 2011 e 2015.

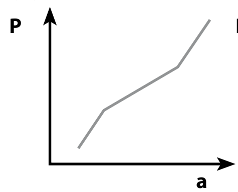
Ano(a)	2011	2012	2013	2014	2015
PRODUÇÃO (em milhares de toneladas)	30	40	50	60	80

O gráfico que melhor representa a produção (P) no período considerado é:

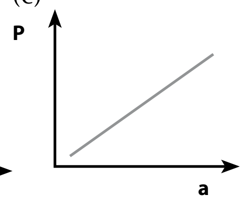
(a)



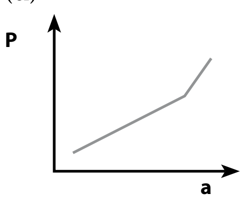
(b)



(c)



(d)



SOLUÇÂO:

Calculemos as taxas de variação da produção (P) em relação à variação de tempo (t) durante os períodos considerados:

2011 --- 2012

$$m = \frac{\textit{variação de } P}{\textit{variação de } T} = \frac{40 - 30}{2012 - 2011} = \frac{10}{1} = 10 \textit{ milhares de toneladas/ano}$$

2012 --- 2013

$$m = \frac{\textit{variação de P}}{\textit{variação de T}} = \frac{50 - 40}{2013 - 2012} = \frac{10}{1} = 10 \textit{ milhares de toneladas/ano}$$

2013 --- 2014

$$m = \frac{\textit{variação de P}}{\textit{variação de T}} = \frac{60 - 50}{2014 - 2013} = \frac{10}{1} = 10 \textit{ milhares de toneladas/ano}$$

2014 --- 2015

$$m = \frac{\textit{variação de P}}{\textit{variação de T}} = \frac{80 - 60}{2015 - 2014} = \frac{20}{1} = 20 \textit{ milhares de toneladas/ano}$$

Como podemos observar, durante os primeiros três períodos, a taxa de variação foi constante e igual a 10, aumentando no último período para 20. Observe que o gráfico do item (d) atende a esse resultado, pois temos duas inclinações distintas, sendo que a mais acentuada ocorre no último período considerado. Assim, a opção correta é a letra (d).

É comum as bibliografias de matemática utilizarem com maior frequência o termo "coeficiente angular da reta" em vez de "taxa de variação". Chamamos atenção para esse fato a fim de enfatizar que todo exercício abordado neste capítulo envolvendo o termo "taxa de variação do modelo linear" possuiria a mesma resolução caso fosse utilizado o termo "coeficiente angular da reta" representativa do referido modelo.

REFERÊNCIAS

BONAFINI, F. C. (Org.). **Matemática.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2012.

DEMANA, F. et al. **Pré-cálculo.** 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2013.

GOLDSTEIN, L. J. **Matemática aplicada:** economia, administração e contabilidade. 12. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar.** 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 1.

JACQUES, I. **Matemática para economia e administração.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MORETTIN, P. A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. O. **Cálculo:** funções de uma e várias variáveis. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. (Livro-texto).

ROCHA, A.; MACEDO, L. R. D.; CASTANHEIRA, N. P. **Tópicos de matemática aplicada.** Curitiba: Intersaberes, 2013. (Série Matemática Aplicada).

SILVA, E. M.; SILVA, S. M. **Matemática básica para cursos superiores.** São Paulo: Atlas, 2008.

CAPÍTULO 2
MODELO QUADRÁTICO
(POR EDÉZIO SACRAMENTO)

As funções quadráticas são funções de 2º grau, muito comuns em aplicações nas ciências e em economia. Neste capítulo, você estudará situações práticas envolvendo as funções do 2º grau. Será dada atenção especial ao vértice da parábola. Veremos que as coordenadas do vértice são úteis para a determinação de valores máximos, valores mínimos e intervalos de crescimento (ou decrescimento) das funções associadas.

FUNÇÃO DO 2º GRAU: MODELO QUADRÁTICO

Uma bola, ao ser chutada em um tiro de meta por um goleiro, em uma partida de futebol, teve sua trajetória descrita pela equação $h(t) = -2t^2 + 8t$ $(t \geq 0)$, em que t é o tempo medido em segundos e h(t) é a altura em metros da bola no instante t. Determine, após o chute, a altura máxima atingida pela bola e o instante em que a bola retornará ao solo.

Para resolver esse problema, precisamos estudar as funções quadráticas.

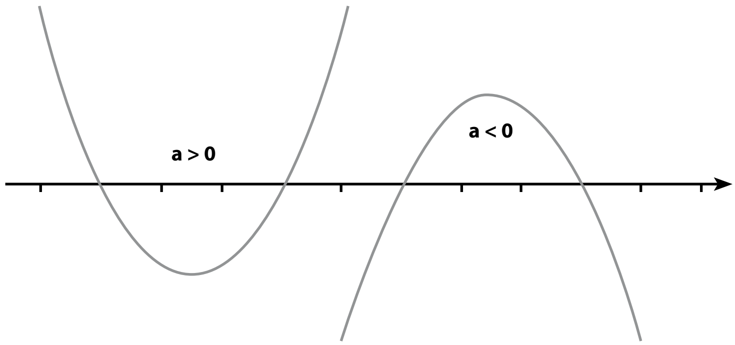
Definição: sejam a, b e $c \in IR$, com $a \neq 0$. Chamamos de função do 2º grau ou quadrática a função dada por:

$$\begin{array}{ccc} f: IR & \rightarrow & IR \\ x & \rightarrow & y = f(x) = ax^2 + bx + c \end{array}$$

Concavidade da parábola

O gráfico da função quadrática é uma curva no plano cartesiano denominada parábola. Além disso, se:

- $a > 0$, então a parábola tem concavidade voltada para cima.
- $a < 0$, então a parábola tem concavidade voltada para baixo.



Raízes ou zeros da função quadrática

Para determinar os zeros da função quadrática:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

devemos resolver a equação do 2º grau:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Como sabemos, as raízes dessa equação são calculadas pela fórmula (de Bhaskara):

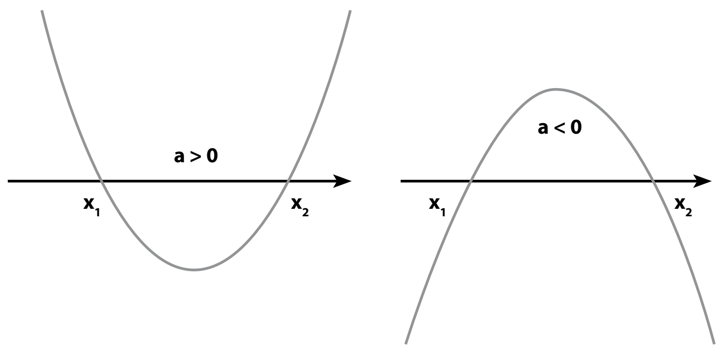
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Na qual $\Delta = b^2 - 4ac$ denomina-se discriminante (ou delta) da equação. Note que a existência e o número de zeros da função dependem do sinal de Δ. Assim, podemos dividir o estudo do sinal da função quadrática em três casos:

1º caso: $\Delta > 0$.

Nesse caso, a função apresenta dois zeros reais distintos:

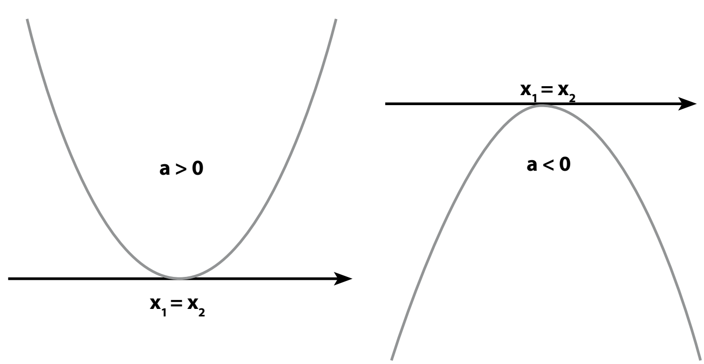
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$



2º caso: $\Delta = 0$.

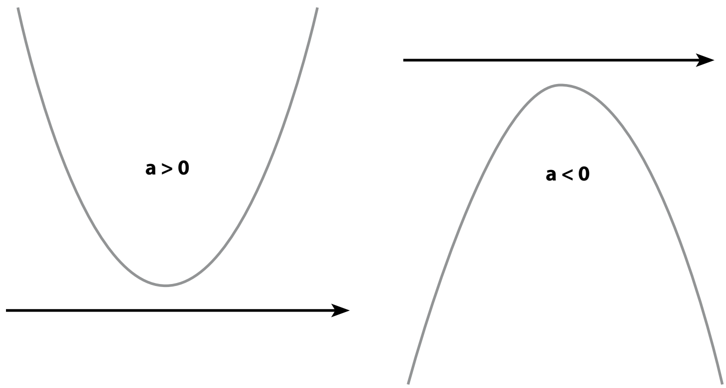
Nesse caso, a função apresenta um zero real duplo:

$$x_1 = x_2 = - \frac{-b}{2a}$$



3º caso: $\Delta < 0$.

Nesse caso, a função não apresenta zeros reais.



Exemplo 1: dada a função $y = x^2 - 4x + 3$, encontre suas raízes e faça um esboço do gráfico.

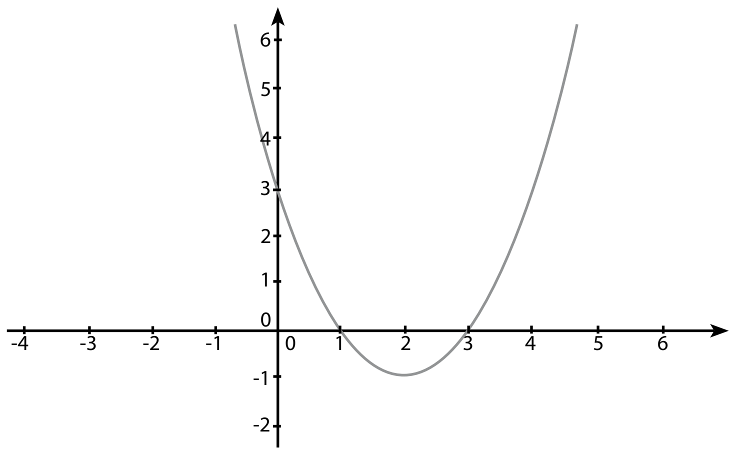
Solução: fazendo $y = 0$ na equação dada, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 3 = 4 > 0$$

Temos, portanto, duas raízes reais e distintas. Pela fórmula de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \,.\, 1} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 3$$

Assim, $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$ são as raízes da função dada. Isso significa que essa função passa pelo eixo x, nos pontos (1,0) e (3,0). Verifique isso na figura a seguir.



Exemplo 2: dada a função $y = x^2 - 4x + 4$, encontre suas raízes e faça um esboço do gráfico.

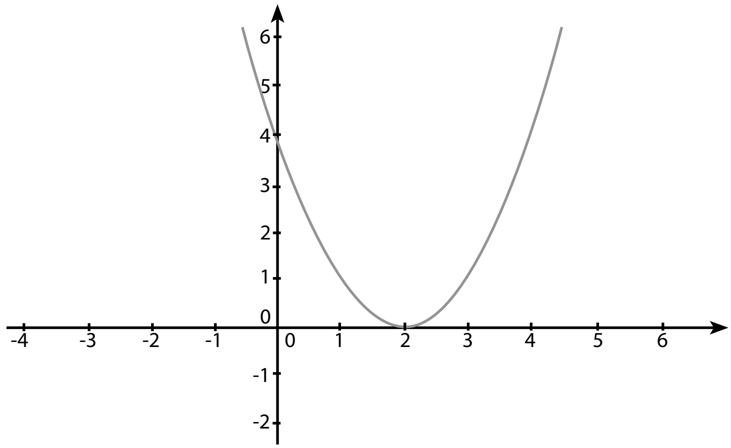
Solução: fazendo $y = 0$ na equação dada, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

Temos, portanto, duas raízes reais e distintas. Pela fórmula de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 = 2$$

Assim, $x = 2$ é um zero real duplo da função dada. Isso significa que essa função passa pelo eixo x, no ponto (2,0). Verifique isso na figura a seguir.

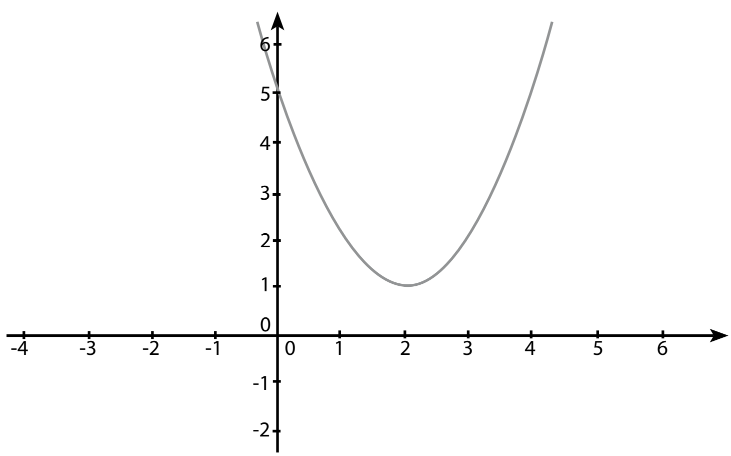


Exemplo 3: dada a função $y = x^2 - 4x + 5$, encontre suas raízes e faça um esboço do gráfico.

Solução: fazendo $y = 0$ na equação dada, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 5 = -4 < 0$$

Portanto, não possui raízes reais e, consequentemente, não passa pelo eixo x. Verifique isso na figura a seguir.



Observação 1: a soma e o produto das soluções da equação do 2º grau são dados por, respectivamente:

$$-\frac{b}{a} \quad e \quad \frac{c}{a}$$

Observação 2: além disso, se $\Delta \geq 0$, podemos fatorar o trinômio $ax^2 + bx + c$ da seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Em que x_1 e x_2 são as raízes reais da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemplo 4: vimos que as raízes da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$ são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$ (veja o exemplo 1). Temos para essa equação que a = 1, b = –4 e c = 3, o que acarreta:

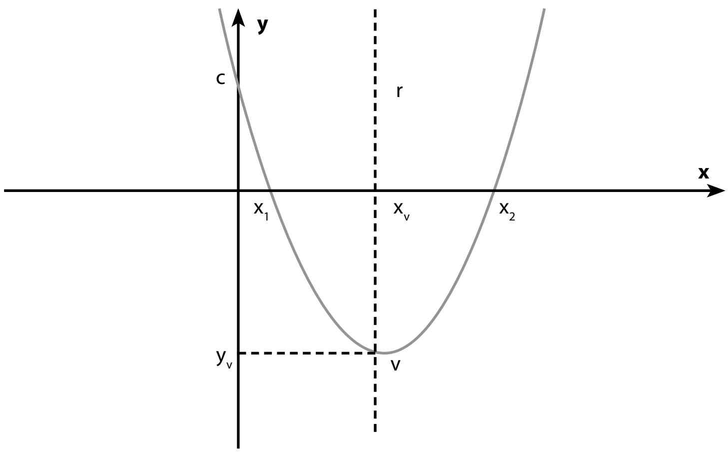
$$-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4 \quad \text{e} \quad \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$$

Também podemos verificar que:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

Construção do gráfico da função quadrática

A figura ilustrada a seguir mostra uma parábola, gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com sete elementos importantes assinalados:



O número c determina a ordenada em que essa parábola intercepta o eixo y, uma vez que $c = f(0)$. O ponto V é chamado de vértice da parábola. A reta r, perpendicular ao eixo x e passando pelo vértice, é o eixo de simetria da parábola. O vértice V é dado por $V(x_v, y_v)$, com:

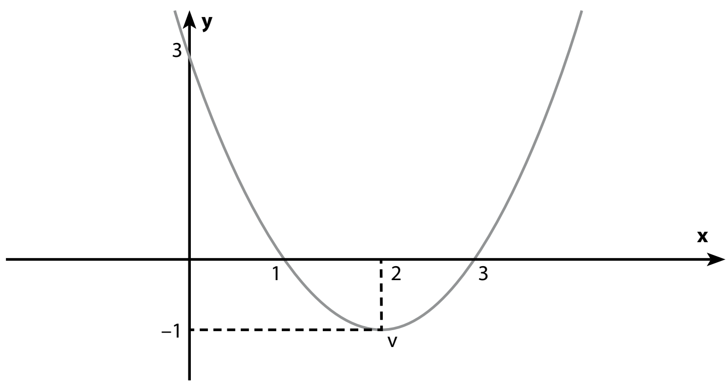
$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a} \text{ (já que } y_v = f(x_v) = a(x_v)^2 + bx_v + c\text{)}$$

Exemplo 5: vamos construir o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$ do exemplo 1.

Temos que:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(1)} = 2 \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4(1)} = -1$$

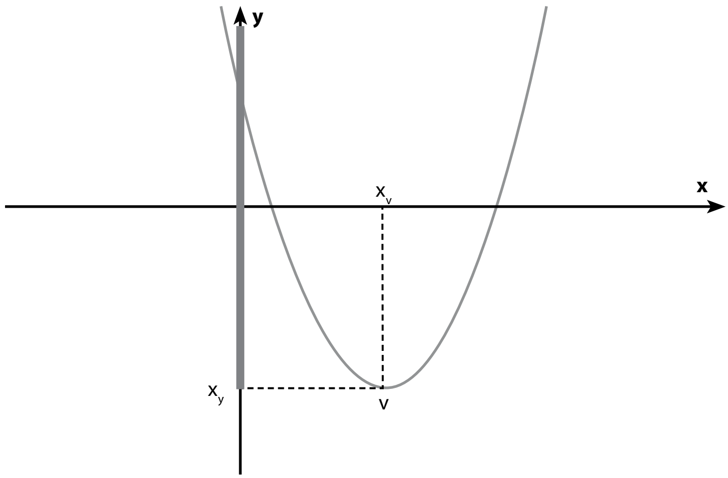
E as raízes $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.



Máximo ou mínimo: conjunto imagem

A imagem de f é obtida com auxílio do vértice da parábola, como se segue:

1º caso: a > 0 (concavidade voltada para cima).
Nesse caso, a função apresenta um valor mínimo, igual à ordenada do vértice da parábola. Veja a figura a seguir.



Assim:

- $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ é chamado de ponto de mínimo de f.

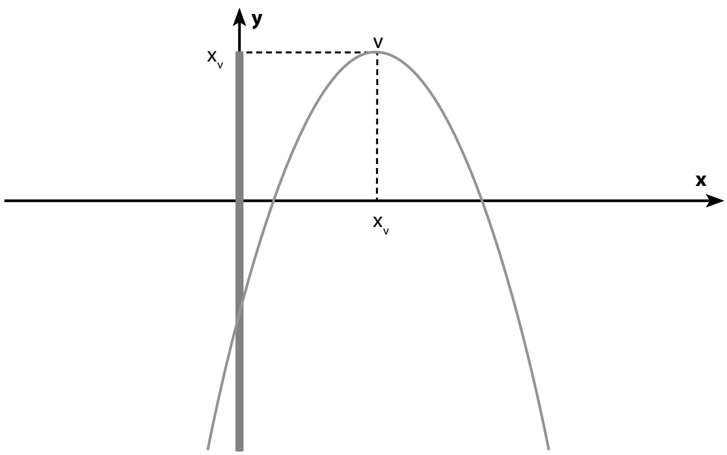
- $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é chamado de valor mínimo de f.

- f é decrescente em $(-\infty, x_v]$ e crescente em $[x_v, +\infty)$.

Logo, $Im\ f = \left\{ y \in IR / y \geq -\dfrac{\Delta}{4a} \right\} = \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty \right)$.

2º caso: $a < 0$ (concavidade voltada para baixo).

Nesse caso, a função apresenta um valor máximo, igual à ordenada do vértice da parábola. Veja a figura a seguir.



Assim:

- $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ é chamado de ponto de máximo de f.

- $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é chamado de valor máximo de f.

- f é crescente em $(-\infty, x_v]$ e decrescente em $[x_v, +\infty)$.

Logo, $Im\, f = \left\{ y \in IR / y \leq -\dfrac{\Delta}{4a} \right\} = \left(+\infty, -\dfrac{\Delta}{4a} \right]$.

Exemplo 6: agora podemos resolver o problema fornecido no início do capítulo. Temos que a altura máxima será atingida na ordenada do vértice, ou seja:

$$h_{max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{8^2 - 4(-2)\,.\,0}{4(-2)} = 8\ m$$

A bola retornará ao solo quando h(t) = 0, isto é, quando $-2t^2 + 8t = 0$. Como essa equação é uma equação do 2º grau incompleta, podemos resolvê-la fatorando-a:

$$-2t^2 + 8t = -2t(t - 4) = 0 \Rightarrow -2t = 0 \text{ ou } t - 4 = 0$$
$$\Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = 4, \text{ ou seja, em } t = 4 \text{ s.}$$

APLICAÇÕES DO MODELO QUADRÁTICO

Algumas situações práticas podem ser representadas pelas funções quadráticas. Enfatizaremos a função custo, função receita e a função lucro, que estão relacionadas aos fundamentos administrativos de qualquer empresa.

Função demanda

Relaciona a quantidade demandada e o preço de um bem.

Sabe-se que, quando o preço aumenta, a procura diminui, e, quando o preço diminui, a procura aumenta. Essa é a lei de demanda, caracterizada por uma função decrescente e indicada por:

$$p = f(q)$$

Em que p é o preço por unidade do produto, e q, a quantidade demandada.

Função custo – C

Essa função está ligada ao gasto na produção da mercadoria, como: transporte, matéria-prima, salário, impostos e contribuições. Toda despesa avaliada na produção de uma mercadoria é representada por uma função custo, que relaciona o custo à quantidade de peças a serem produzidas (custo variável) e aos gastos fixos (salário, energia elétrica, água, impostos, contribuições, entre outros). Assim, podemos escrever:

$$C = C_F + C_V$$

Em que C_F é o custo fixo e C_V é o custo variável.

Função receita – R

A função receita está ligada ao dinheiro arrecadado pela venda de um determinado produto. É comum que tal função seja representada por uma expressão matemática que determine o preço de venda do produto, incluindo todas as despesas e a faixa percentual de lucro.

$$R = p \,.\, q$$

Em que p representa o preço unitário, e q, a quantidade comercializada do produto.

Função lucro – L

A função lucro é a diferença entre a função receita e a função custo. Caso o resultado seja positivo, houve lucro; se negativo, houve prejuízo.

$$L = R - C$$

Exemplo 7: a função de demanda de um produto é $p = 9 - x$, em que x é a quantidade demandada, e a função custo é $C = 15 + x$. Obtenha a função receita e a função lucro.

Solução: por definição de receita:

$$R = p \,.\, q$$
$$R(x) = (9 - x)$$
$$x = 9x - x^2.$$

A função lucro é dada por:

$$L(x) = R(x) - C(x) = 9x - x^2 - (15 + x)$$
$$L(x) = 9x - x^2 - 15 - x$$

Portanto, a função lucro será dada pela função quadrática:

$$L(x) = -x^2 + 8x - 15$$

Exemplo 8: um fabricante pode produzir calçados ao custo de R$ 20,00 o par. Estima-se que, se cada par for vendido por x reais, o fabricante venderá por mês $80 - x$ ($0 \leq x \leq 80$) pares de sapatos. Assim, a receita mensal do fabricante é:

$$R(x) = x \,.\, (80 - x) = 80x - x^2$$

O custo mensal é:

$$C(x) = 20 \,.\, (80 - x) = 1.600 - 20x$$

E o lucro mensal será dado por:

$$\begin{aligned} L(x) = R(x) - C(x) &= 80x - x^2 - (1.600 - 20x) \\ &= 80x - x^2 - 1.600 + 20x \end{aligned}$$

Portanto, o lucro do fabricante será dado pela função quadrática:

$$L(x) = -x^2 + 100x - 1.600$$

Exemplo 9: suponhamos agora que haja a receita $R(x) = -2x^2 + 200x$ na venda de x pares de sapatos e que o custo na sua fabricação seja dado por $C(x) = 40x + 1.400$. Então, o lucro na comercialização dos sapatos será:

$$L(x) = -2x^2 + 200x - (40x + 1.400) =$$
$$-2x^2 + 200x - 40x - 1.400$$

Assim, teremos:

$$L(x) = -2x^2 + 160x - 1.400$$

Exemplo 10: o custo de produção de determinada mercadoria é dado por um custo fixo de R$ 1.400,00, que inclui despesas como salário, energia elétrica, água e impostos, mais um custo variável de R$ 40,00 por peça produzida. Considerando a equação de demanda sendo dada por $p = 200 - 2x$, determine a função lucro dessa mercadoria, que calcula o lucro de acordo com o número de unidades vendidas.

Solução: seja x o número de unidades vendidas, temos:

Função custo:

$C(x) = 1.400 + 40x$

Função receita:

$R(x) = p\,.\,x = (200 - 2x)x = 200x - 2x^2$

Função lucro:

$L(x) = R(x) - C(x) = 200x - 2x^2 - (1.400 + 40x) = -2x^2 + 160x - 1.400$

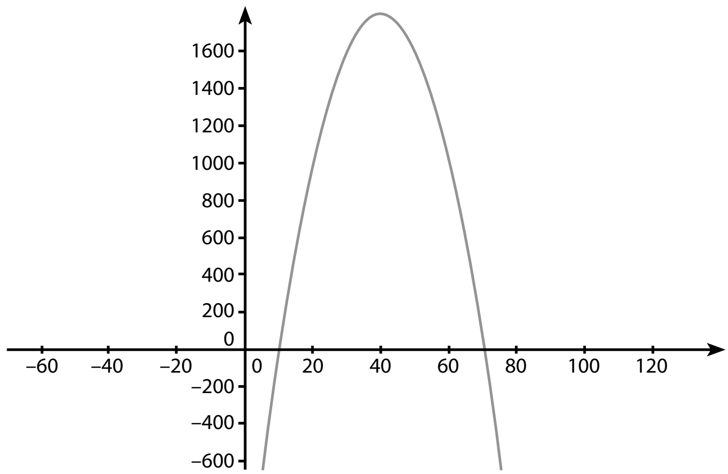
APLICAÇÕES: PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Um problema de otimização é aquele em que se procura determinar os valores extremos de uma função, isto é, o maior ou o menor valor que uma função pode assumir em um dado intervalo. Problemas de otimização são comuns em nossa vida diária e aparecem quando procuramos determinar o nível de produção mais econômico de uma fábrica, isto é, quando queremos maximizar os lucros e minimizar os custos.

Exemplo 11: no exemplo 10, vimos que a função lucro na venda de uma determinada mercadoria era dada pela função quadrática:

$$L(x) = -2x^2 + 160x - 1.400$$

Essa função tem concavidade voltada para baixo e, portanto, possui um ponto de máximo e um valor máximo que são dados pelas coordenadas do vértice, como foi visto anteriormente. Seu gráfico é dado pela figura a seguir.



O valor de x que maximiza o lucro é a abscissa do vértice.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{160}{2(-2)} = 40$$

E o lucro máximo é:

$$L(40) = -2(40)^2 + 160(40) - 1.400 = 1.800$$

A venda de 40 unidades da mercadoria maximiza o lucro, que será de R$ 1.800,00.

Exemplo 12: em um ano, o valor de uma ação negociada na bolsa de valores, no decorrer dos meses, indicados por x, é dado pela expressão $A(x) = 2x^2 - 20x + 60$. Sabendo que o valor da ação é dado em reais (R$), faça um esboço do gráfico e comente os significados dos principais pontos (considere x = 0 o momento em que a ação começa a ser negociada; x = 1 após um mês; x = 2 após dois meses etc.).

Solução: os coeficientes dos termos da função são a = 2, b = –20 e c = 60.

(I) A concavidade é voltada para cima, pois a > 0.

(II) A parábola corta o eixo y em c = 60.

(III) A parábola corta o eixo x quando A = 0, ou seja, nas raízes, se existirem, da equação :

$$2x^2 - 20x + 60 = 0$$

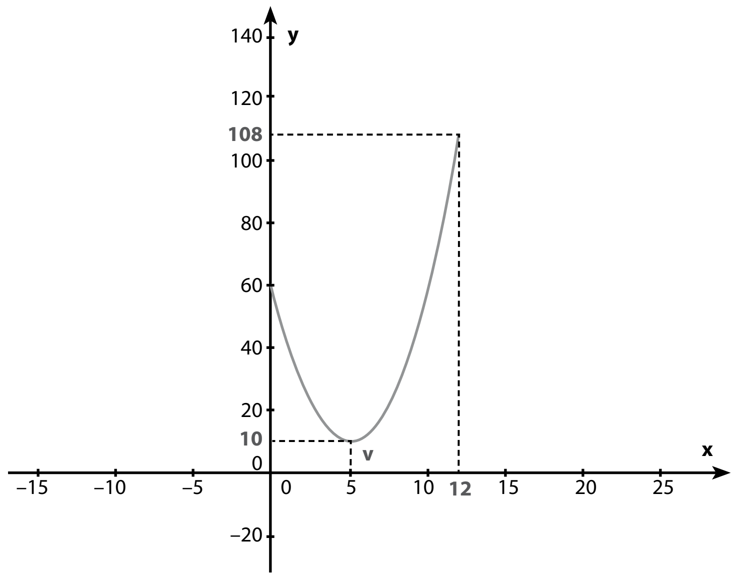
Vemos que $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-20)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 60 = -80 < 0$; portanto, não existem raízes reais, pois a parábola não corta o eixo x.

(IV) O vértice da parábola é dado por:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right) = \left(-\frac{-20}{2(2)}, -\frac{-80}{4(2)} \right) = (5, 10)$$

(V) O valor da ação após um ano é de:

$$A(12) = 2(12)^2 - 20(12) + 60 = 108$$



Por ser a concavidade voltada para cima, nesse exemplo, temos um eixo de simetria em x = 5, indicando que o valor da ação é decrescente, do momento em que a ação começa a ser negociada (x = 0) ao final do 5º mês (x = 5), e crescente, do final do 5º mês (x = 5) ao final do 12º mês (x = 12).

O ponto em que a curva corta o eixo y indica que, no momento em que a ação começa a ser negociada (x = 0), o seu valor era A = 60.

Nesse exemplo, não existem pontos em que a curva corte o eixo x, ou seja, em nenhum momento o valor da ação será nulo (A = 0).

O vértice V = (5, 10) dá o mês, x = 5, que minimiza o valor da ação, e tal valor mínimo é V = 10.

REFERÊNCIAS

LEITHOLD, L. **Matemática aplicada à economia e administração.** São Paulo: Harbra, 1988.

MORETTIN, P. A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. O. **Cálculo:** funções de uma variável. 3. ed. São Paulo: Atual, 1999.

MUROLO, A. C.; GIÁCOMO, A. B. **Matemática aplicada à administração, economia e contabilidade.** São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

Professor Fereto – Função quadrática (Aula 1 de 9): <https://youtu.be/Z5aVW_Zgifk?>.

Professor Fereto – Função quadrática (Aula 2 de 9): <https://youtu.be/CNqeTO2tCuI>.

Professor Fereto – Função quadrática (Aula 3 de 9): <https://youtu.be/4d48gLFe3F0>.

Professor Fereto – Função quadrática (Aula 4 de 9): <https://youtu.be/oPLsPe94q8Y>.

Professor Fereto – Função quadrática (Aula 5 de 9): <https://youtu.be/ZnxMdyN4Xp8>.

Professor Fereto – Função quadrática (Aula 6 de 9): <https://youtu.be/U9I1LFFcUkw>.

Professor Fereto – Função quadrática (Aula 7 de 9): <https://youtu.be/-iMToBhO2i8>.

Professor Fereto – Função quadrática (Aula 8 de 9):
<https://youtu.be/yihH524OkeA>.

Professor Fereto – Função quadrática (Aula 9 de 9):
<https://youtu.be/SggGwu1VV3s>.

CAPÍTULO 3
MODELO EXPONENCIAL
(POR ANDRÉ LADEIRA)

As funções exponenciais são muito importantes por auxiliar a construção de modelos de sistemas que não obedecem ao comportamento linear ou quadrático vistos nos capítulos anteriores. Vale notar que muitos são os comportamentos matemáticos com essa natureza como, por exemplo, a capitalização composta de juros no mercado financeiro, o crescimento de uma população de microrganismos ou mesmo uma população humana; a depreciação de alguns bens como veículos, a forma como se desenvolvem habilidades em um processo de aprendizagem na área da informação, como se dispersam em redes sociais; na física, a fissão de átomos radioativos, além de inúmeros outros comportamentos nas mais variadas áreas de interesse científico.

INTRODUÇÃO AO MODELO EXPONENCIAL

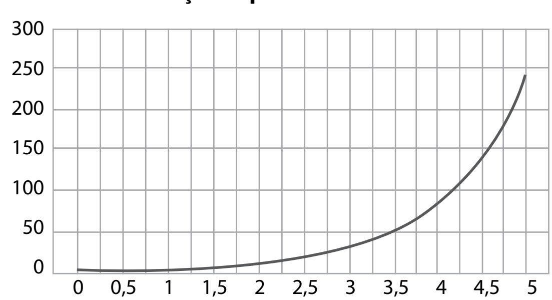
No **Dicionário Informal** (2016), o termo exponencial é definido como:

> **1.** [Matemática] Que tem expoentes ou é relativo a expoente.
> **2.** [Matemática] Que tem expoente variável ou indeterminado.
> **3.** Que é considerado acima do comum.
> **4.** Que tem grande ritmo ou variação.
> **Ex. 1:** Faremos um cálculo exponencial.
> **Ex. 2:** O crescimento era exponencial.

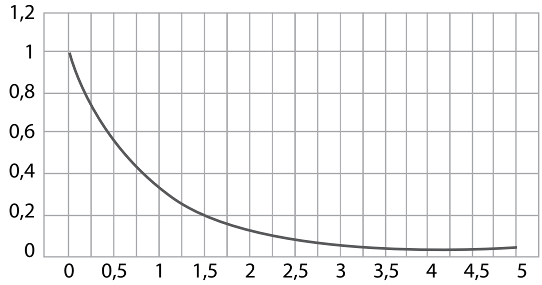
É comum dizermos que um determinado homem é um expoente em valor ou mérito, o que quer dizer se destaca entre os demais homens.

No sentido matemático, o modelo (função) exponencial expressa um crescimento ou um decrescimento característico do fenômeno que está sendo estudado, tendo os seguintes perfis típicos:

Função exponencial crescente



Função exponencial decrescente



E sua expressão matemática padrão é dada por:

$$f(x) = k \,.\, b^n$$

Na qual:

b = base.

n = expoente.

k = é uma constante (valor inicial).

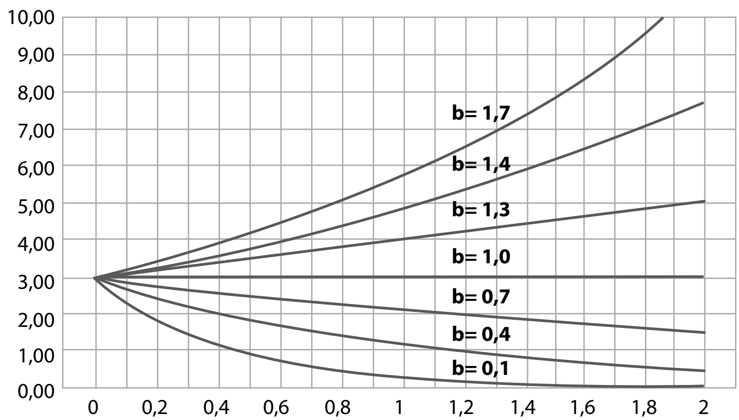
Podemos reescrever a equação como:

$$y = y_0\,(1 + k)^x$$

Dessa forma, vemos que o valor final (y) é calculado a partir do valor inicial (y_0), que multiplica uma potência cuja base é (1 + k), sendo, nesse caso, k a taxa de crescimento (k > 0) ou decrescimento (k < 0) da função, ou seja, o ritmo que a função cresce ou decresce (mais rapidamente ou mais vagarosamente), e, finalmente, a variável que representa a repetição (periodicidade) da função (x), geralmente o tempo.

É comum que a base seja a constante “e”, conhecida como constante de Euler, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, e também pelos nomes: número ou constante de Néper, ou neperiano, cujo valor é 2,718281828...

Estudando a função exponencial, percebemos que, ao variarmos o valor da base “b”, temos o seguinte comportamento:



Para b < 1, a função se torna decrescente, e, quanto menor o valor de b, mais rapidamente a função decresce.

Para b = 1, a função é constante (afinal, 1 elevado a qualquer valor é sempre 1).

Para b > 1, a função se torna crescente, e, quanto maior o valor de b, mais rapidamente a função cresce.

NOTA:

Veja que, se b = 1,7 e b representa a base, temos:

$$y = y_0\ (1 + k)^x = y_0\ (1{,}7)^x\ y = y_0\ (1 + 0{,}7)^x$$

Logo, vemos que k (por ser maior que 1) é a taxa de crescimento e vale 0,7, ou seja 70%.

Se b = 1,0, temos:

$$y = y_0\ (1 + k)^x = y_0\ (1{,}0)^x\ y = y_0\ (1 + 0)^x$$

Logo, vemos que k (por ser igual a 0) não representa nem um crescimento, nem um decrescimento, e vale 0,0, ou seja, 0%.

Se b = 0,7, temos:

$$y = y_0\ (1 + k)^x = y_0\ (0{,}7)^x\ \ y = y_0\ (1 - 0{,}3)^x$$

Logo, vemos que k (por ser menor que 1) é a taxa de decrescimento e vale –0,3, ou seja, –30%.

O estudo do modelo exponencial nos remete à necessidade de conhecermos a álgebra das potências e suas propriedades. Cabe aqui o registro da diferenciação entre o conceito da função potência e da função exponencial. Na verdade, em ambos os casos, temos uma potência envolvida, mas a diferença reside no local em que está a variável.

Vejamos os exemplos:

Função exponencial:

$$f(x) = e^x$$

Função potência:

$$g(x) = x^3$$

Na verdade, uma potência é um caso particular de uma multiplicação, em que temos:

$$b^n = b \,.\, b \,.\, b \,.\, b \ldots b$$

(“*b*” *multiplicado por ele mesmo “b” vezes*)

Como já visto no início deste tópico:

b = base.
n = expoente.

Exemplo:

$$2^4 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 16$$

Como o expoente é 4, multiplicamos a base 2 por ela mesma quatro vezes.

Exemplo:

$$5^3 = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 125$$

Como o expoente é 3, multiplicamos a base 5 por ela mesma três vezes.

Algumas propriedades são fundamentais para o melhor entendimento do estudo de potência e suas aplicações. Vejamos:

Expoente zero (com qualquer base, a potência nesse caso será 1).	$b^0 = 1$
Multiplicação entre potências (com bases iguais, pode-se manter a base e somar os expoentes).	$b^x \,.\, b^y = b^{x+y}$
Razão entre potências (com bases iguais, pode-se manter a base e subtrair os expoentes).	$\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$
Expoente negativo (ou seja, um expoente negativo é equivalente a inverter a potência e trocar o sinal).	$b^{-x} = \dfrac{1}{b^x}$
Potência de uma potência (manter a base e multiplicar os expoentes).	$(b^x)^y = b^{x.y}$
Raiz de uma potência (um expoente fracionário representa, na verdade, uma operação de radiciação).	$(b)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{b}$ $\quad (b)^{\frac{y}{x}} = \sqrt[x]{b^y}$

Não é incomum desejar extrair o expoente de uma potência e torná-lo explícito na equação, e, para isso, utilizamos os logaritmos. Como veremos a seguir, as funções exponencial e logarítmica referem-se a movimentos inversos da potenciação. Na matemática em geral, esses movimentos numéricos que desfazem o outro são chamados de inverso. Então, podemos dizer que o inverso da potência é o logaritmo, e vice-versa.

Dessa forma, são recorrentes as situações em que, para resolver uma equação com potência, temos de recorrer aos logaritmos, no caso das equações exponenciais aos logaritmos.

A relação abaixo mostra justamente isso:

$$y = b^{x} \quad \rightleftarrows \quad x = \log_{b} y$$

Quando b = 10, dizemos que é o logaritmo decimal e o representamos usualmente sem o 10 na base:

$$x = \log_{10} y = \log y$$

Quando b = e, dizemos que é o logaritmo natural e o representamos da seguinte forma:

$$x = \log_{e} y = ln\, y$$

Vejamos agora algumas propriedades dos logaritmos:

O logaritmo da unidade em qualquer base é nulo.	$\log_b 1 = 0$; *porque* $b_0 = 1$
O logaritmo da base é sempre igual a 1.	$\log_b b = 1$; *porque* $b^1 = b$
O logaritmo de uma potência é igual ao expoente dessa potência.	$\log_b b^k = \mathrm{k}$; *porque* $b^{\mathrm{k}} = b^{\mathrm{k}}$
É uma propriedade muito utilizada na solução de problemas porque permite extrair o expoente de uma potência.	$M = N \Leftrightarrow \log_{\mathrm{b}}\mathrm{M} = \log_{\mathrm{b}}\mathrm{N}$
O logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores (log do produto é a soma dos logs).	$\log_b (M \,.\, N) = \log_b M + \log_b N$
O logaritmo de um quociente (razão) é igual à diferença dos logaritmos dos fatores (log da razão é a diferença dos logs).	$\log_b (M / N) = \log_b M - \log_b N$
No logaritmo de uma potência, o expoente da potência pode multiplicar o logaritmo de forma equivalente.	$\log_b M^k = k \,.\, \log_b M$
A mudança de base de um logaritmo permite que, a partir de um logaritmo com base desconhecida, possa se transformar em uma base conhecida como a decimal e a natural.	$\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

Praticando a álgebra com potências e logaritmos:

a) Calcule o logaritmo:

$$\log_4 \frac{1}{16}$$

$$\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = \log_4 1 - \log_4 16 = 0 - 2 = -2$$

Porque:

$$y = b^x \rightleftarrows x = \log_b y$$

$$16 = 4^2 \rightleftarrows 2 = \log_4 16$$

b) Calcule o logaritmo:

$$\log_{1/5} 25$$

$$x = \log_{\frac{1}{5}} 25 \rightleftarrows 25 = \left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{1}{(5)^x}$$

$$25 = (5)^2 = \frac{1}{(5)^x} = (5)^{-x}$$

$$(5)^2 = (5)^{-x} \quad x = -2$$

c) Calcule o logaritmo, sabendo que log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48:

$$\log 24 = ?$$

$$\log 24 = \log 8 \,.\, 3 = \log 2^3 \,.\, 4 = \log 2^3 + \log 4 = 3 \log 2 + \log 4$$

$$\log 24 = 3 \,.\, 0{,}3 + 0{,}48 = 0{,}9 + 0{,}48 = 1{,}38$$

d) Resolva a equação exponencial:

$$500 \,.\, 1{,}2^x = 800$$

$$1{,}2^x = \frac{800}{500} = 1{,}6$$

Aplicando o logaritmo dos dois lados (veja as propriedades no quadro apresentado anteriormente):

$$ln\ 1{,}2^x = ln\ 1{,}6$$

$$x\ ln\ 1{,}2 = ln\ 1{,}6$$

$$x = \frac{ln\ 1{,}6}{ln\ 1{,}2} = \frac{0{,}4700}{0{,}1823} = 2{,}5779$$

ou

$$log\ 1{,}2^x = log\ 1{,}6$$

$$x \log 1{,}2 = \log 1{,}6$$

$$x = \frac{\log 1{,}6}{\log 1{,}2} = \frac{0{,}2041}{0{,}0792} = 2{,}5779$$

e) Resolva a equação exponencial:

$$e^{-5x} = 0{,}12$$

$$\ln e^{-5x} = \ln 0{,}12$$

$$-5x \ln e = \ln 0{,}12$$

$$-5x \,.\, 1 = \ln 0{,}12$$

$$x = \frac{\ln 0{,}12}{\ln e} = \frac{-2{,}1203}{-5} = 0{,}4241$$

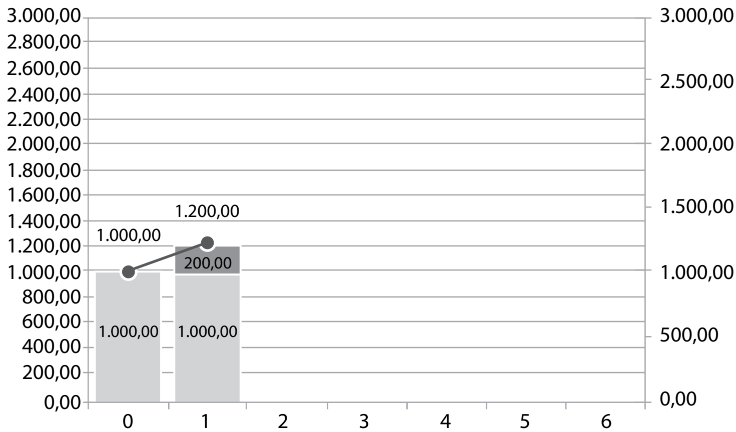
APLICAÇÕES DO MODELO EXPONENCIAL

Regime de capitalização simples (juros simples)

Este exemplo não representa uma aplicação do modelo exponencial, mas começaremos por ele como forma de diferenciar a capitalização simples da composta.

Suponhamos que seja realizado um determinado depósito em uma conta de investimento no valor de R$ 1.000,00 na data de hoje (chamaremos de data zero). Como o dinheiro tem valor, e existem pessoas dispostas a pagar pelo seu uso (no caso, a instituição financeira em que o depósito foi realizado), então, ao final de um período (mês, por exemplo), teremos, ao verificarmos o extrato bancário, o saldo inicial acrescido do "aluguel" pelo uso do dinheiro (capital) por parte da instituição financeira. Fazendo a modelagem (descrevendo esse comportamento em uma linguagem matemática), temos:

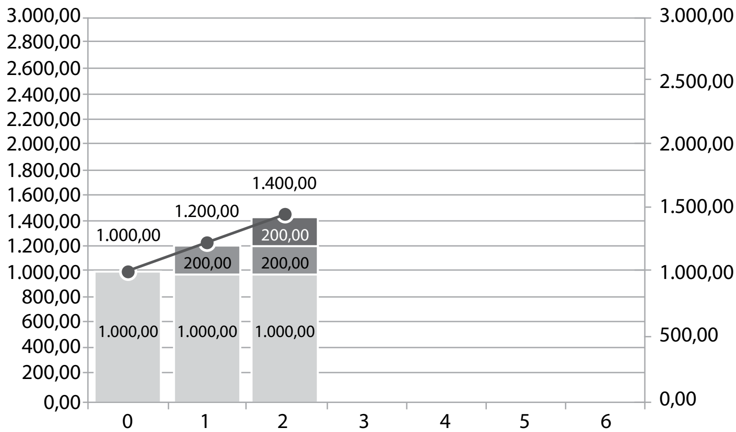
$$FV_1 = PV + juros = PV + PV \,.\, i = PV(1 + i) = PV(1 + i \,.\, 1)$$



FV_1 representa o valor futuro (ou montante), que é o resultado do saldo após o primeiro período, e a taxa de juros considerada foi de 20%, que significa uma relação entre o que se aplicou e o que se deverá ganhar, sob a ótica do investido, ou pagar, sob a ótica da instituição financeira. Dizemos então que, se a taxa de juros é de 20%, podemos escrever que a instituição pagará 20 a cada 100 que foi aplicado, ou seja, 20 / 100 = 0,20.

Se, após o primeiro período, mantivermos o saldo acumulado (capitalizado) por mais um período, teremos:

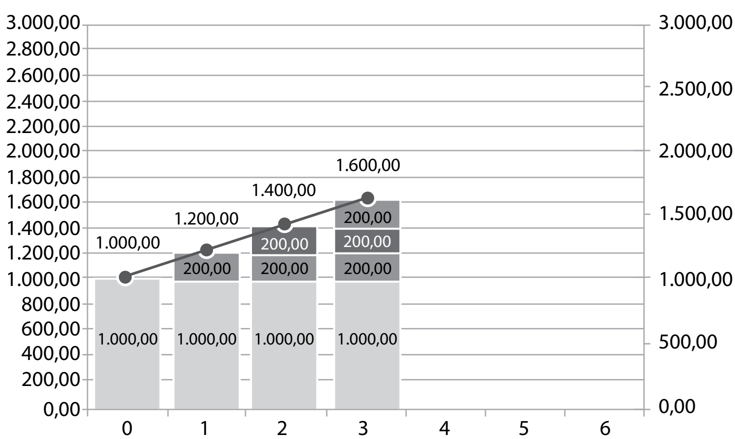
$$FV_2 = FV_1 + juros = PV + PV\,.\,i + PV\,.\,i =$$
$$PV + PV\,.\,i\,.\,2 = PV(1 + i\,.\,2)$$



Nota-se que o saldo acumulado ao final do segundo período (FV_2) será o saldo anterior (FV_1) acrescido de mais uma parcela de juros (aluguel do dinheiro), que, no caso dos juros simples, será sempre calculada sobre o valor inicialmente depositado.

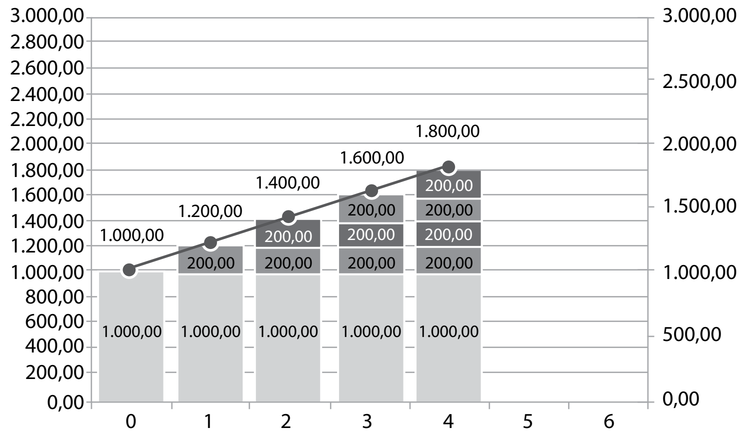
Para mais um período, teremos:

$$FV_3 = FV_2 + juros = PV(1 + i \,.\, 2) + PV \,.\, i =$$
$$PV(1 + i \,.\, 2 + i) = PV(1 + i \,.\, 3)$$



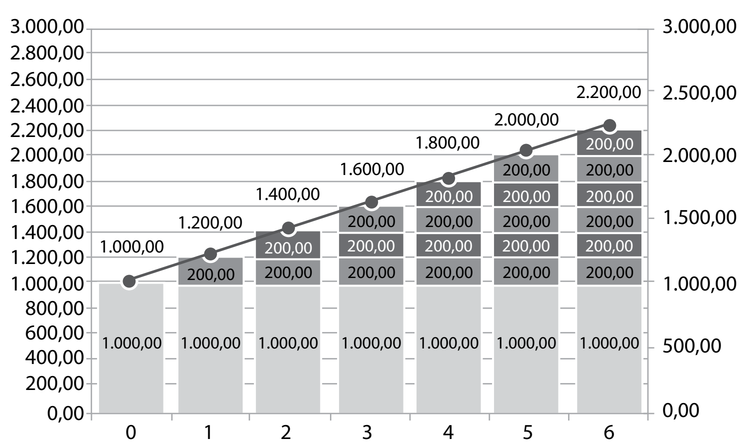
Para o quarto período, teremos:

$$FV_4 = FV_3 + juros = PV(1 + i\,.\,3) + PV\,.\,i =$$
$$PV(1 + i\,.\,3 + i) = PV(1 + i\,.\,4)$$



Generalizando, poderemos chegar à expressão:

$$FV = PV(1 + i\,.\,n)$$



Essa expressão pode ser reescrita como:

$$FV = PV + PV \, . \, i \, . \, n$$

E ela guarda o mesmo padrão da expressão:

$$y = F(x) = b + a \, . \, x$$

FV = y e n = x, ou seja, temos a função do primeiro grau que foi vista no Capítulo 1, ***Modelagem linear***.

Dizemos, então, que o regime de capitalização simples é um modelo no qual o capital cresce de forma linear ao longo do tempo.

Sabe onde esse modelo pode ser encontrado? Nos boletos de pagamentos, quando são pagos após a data de vencimento e, por conta disso, deve ser paga uma mora (dilatação do tempo, demora, atraso) e que, por isso, deverão ser pagos juros (aluguel) do dinheiro devido ao atraso.

Vejamos um exemplo:

LOGOTIPO DO BANCO | **399-9** | 39993.96462 20000.000008 03211.344324 6 59080000040600

Local de Pagamento **Pagar preferencialmente em agência**					Vencimento **19/11/2013**
Beneficiário **CNPJ:**					Agência/Código Cedente
Data Documento **19/11/2013**	Número do Documento **1451223**		Espécie Doc.	Aceite / Data Processamento **19/11/2013**	Nosso Número
Uso do Banco	Carteira **CNR**	Espécie **R$**	Quantidade	(x) Valor	(=) Valor do Documento **406,00**
Instruções (texto de responsabilidade do cedente) **Após o Vencimento Cobrar Multa de R$8,12 e Juros de R$0,14 ao Dia** Até o dia 29/11/2013 conceder abatimento de R$12,18					(–) Desconto (+) Mora/Multa (+) Outros Acréscimos (=) Valor Cobrado
Pagador Sacador/Avalista **- 13JD1 (#00561)**					**CPF:** Código de Baixa: **Ficha de Compensação**

Autenticação Mecânica

Note que, a cada dia de atraso, deverá ser pago um juro (aluguel) de mora (atraso) de R$ 0,14. Assim, o valor a ser pago com atraso cresce linearmente de R$ 0,14 em R$ 0,14 a cada dia de atraso (crescimento linear).

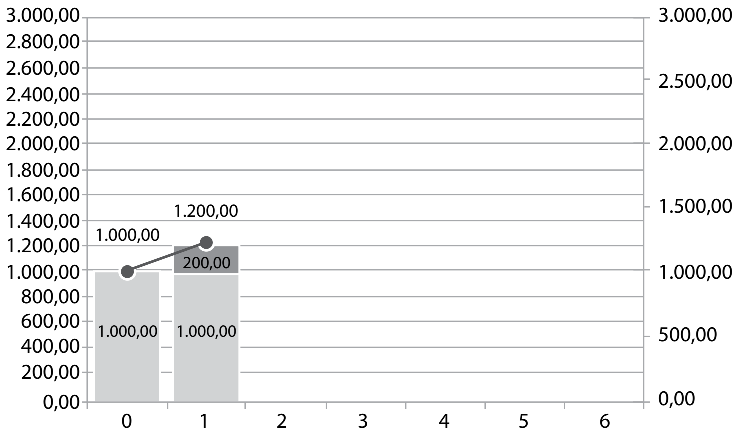
$$FV = PV(1 + i \,.\, n)$$

REGIME DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA (JUROS COMPOSTOS)

Neste próximo exemplo, apresentaremos a capitalização composta, que é utilizada pela maioria das operações financeiras de crédito no mercado e é um grande exemplo de aplicação do modelo exponencial.

Vamos considerar a mesma dinâmica vista no exemplo anterior, ou seja, suponhamos que seja realizado um determinado depósito em uma conta de investimento no valor de R$ 1.000,00 na data de hoje (chamaremos de data zero). Como o dinheiro tem valor, e existem pessoas dispostas a pagar pelo seu uso (no caso, a instituição financeira em que o depósito foi realizado), então, ao final de um período de tempo (mês, por exemplo), teremos, ao verificarmos o extrato bancário, o saldo inicial acrescido do "aluguel" pelo uso do dinheiro (capital) por parte da instituição financeira. Fazendo a modelagem (descrevendo esse comportamento em uma linguagem matemática), temos:

$$FV_1 = PV + juros = PV + PV \,.\, i = PV(1+i) = PV(1+i)^1$$

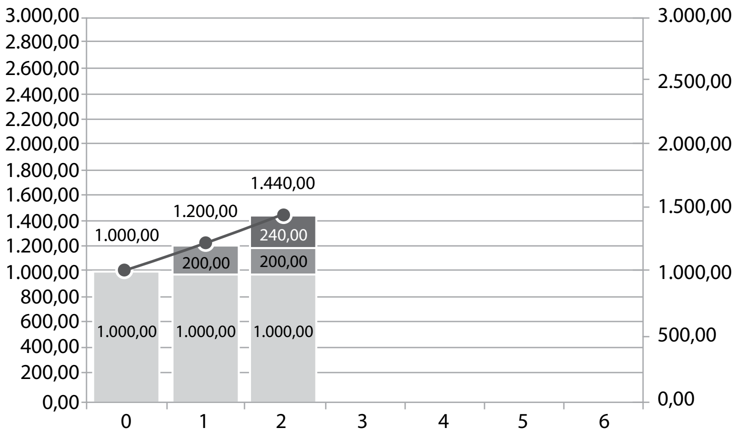


Como pode-se observar, é o mesmo resultado que já tinha sido visto no exemplo anterior com a capitalização simples.

Da mesma forma, FV_1 representa o valor futuro (ou montante), que é o resultado do saldo após o primeiro período, e a taxa de juros considerada foi de 20%, que significa uma relação entre o que se aplicou e o que se deverá ganhar, sob a ótica do investido, ou pagar, sob a ótica da instituição financeira. Dizemos então que, se a taxa de juros é de 20%, podemos escrever que a instituição pagará 20 a cada 100 que foi aplicado, ou seja, 20/100 = 0,20.

Se após o primeiro período mantivermos o saldo acumulado (capitalizado) por mais um período, teremos:

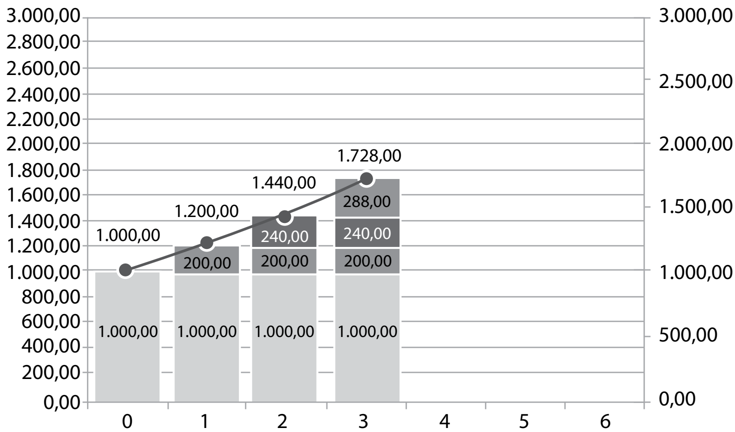
$$FV_2 = FV_1 + juros = FV_1 + FV_1 \, . \, i = FV_1\,(1 + i) =$$
$$PV(1 + i)(1 + i) = PV(1 + i)^2$$



Nota-se que o saldo acumulado ao final do segundo período (FV_2) será o saldo anterior (FV_1) acrescido de mais uma parcela de juros (aluguel do dinheiro), que, no caso dos juros compostos, será sempre calculada sobre o valor anterior, e não mais sobre o valor inicialmente depositado.

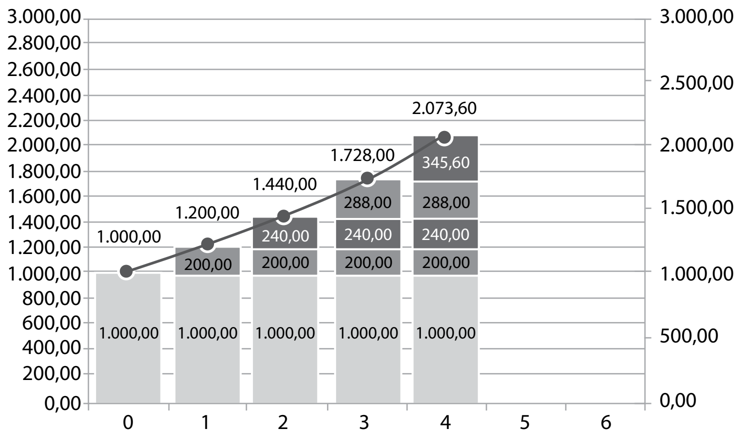
Para mais um período, teremos:

$$FV_3 = FV_2 + juros = FV_2 + FV_2 \,.\, i = FV_2\,(1 + i) =$$
$$PV(1 + i)^2\,(1 + i) = PV(1 + i)^3$$



Para o quarto período, teremos:

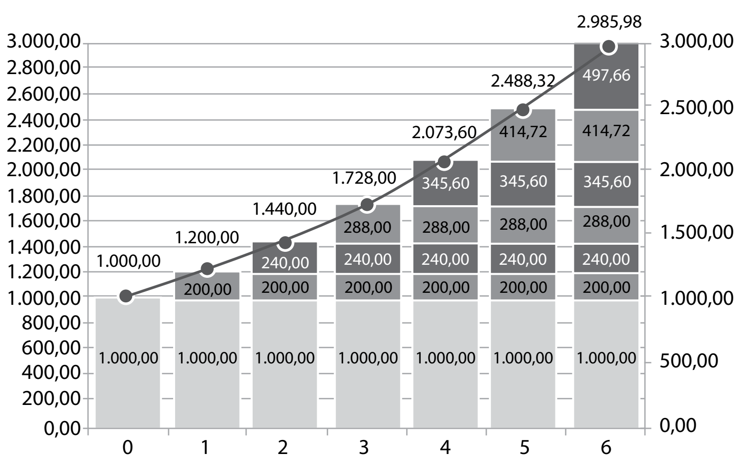
$$FV_4 = FV_3 + juros = FV_3 + FV_3 \, . \, i = FV_3\,(1 + i) = PV(1 + i)^3\,(1 + i) = PV(1 + i)^4$$



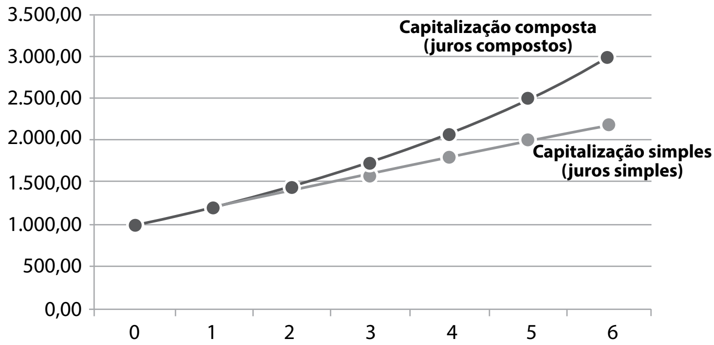
Generalizando, poderemos chegar à expressão:

$$FV_n = PV(1 + i)^n$$

Dizemos, então, que o regime de capitalização composta é um modelo no qual o capital cresce de forma exponencial ao longo do tempo.



Comparando graficamente o comportamento dos dois regimes de capitalização, temos:



Sabe onde esse modelo pode ser encontrado? Em todas as operações de investimento e financiamento em geral do mercado.

Vejamos um exemplo:

Aplicação *versus* investimento (juros compostos):
Vamos supor que você saque R$ 1,00 de sua conta bancária (cheque especial), que esteja praticando a taxa de juros de 10% ao mês e que você viaje por 10 anos (120 meses) e, após esse período, retorne ao banco e verifique seu saldo bancário. Qual seria seu saldo devedor?

Bem, temos o prazo (n), a taxa de juros (i) e o valor inicial (PV ou VP); aplicando-os no modelo exponencial da capitalização composta, temos:

$$FV_n = PV(1 + i)^n = 1{,}00(1 + 0{,}10)^{120} = 1{,}1^{120} = \text{R\$ } 92.709{,}07$$

Incrível, não? Após 10 anos, R$1,00 se transforma em R$ 92.709,07 pelo efeito do comportamento exponencial na relação entre a entrada e a saída desse sistema financeiro (modelo).

Note, contudo, que, se o valor for aplicado em uma caderneta de poupança que pague uma taxa de juros de 0,6%, o saldo após o mesmo período será:

$$FV_n = PV(1 + i)^n = 1{,}00(1 + 0{,}06)^{120} = 1{,}06^{120} = \text{R\$ } 2{,}05$$

Vemos, portanto, que uma característica intrínseca do sistema (no caso, a taxa de juros) pode alterar sensivelmente o resultado da saída desse sistema. Nesse nosso exemplo, seria a diferença entre o valor pago na condição de um empréstimo e o valor recebido em uma aplicação, por exemplo, de uma caderneta de poupança.

Cálculo do tempo em juros compostos:

Um empresário deseja adquirir um novo equipamento para sua indústria que custa R$ 183.283,54. Para isso, pretende aplicar um capital disponível atualmente de R$ 104.000,00 em uma conta de investimento que remunere seu dinheiro a 12% ao ano. Admitindo que o preço do equipamento permaneça constante e que a inflação seja nula, quantos anos será necessário manter esses recursos aplicados para que seja possível fazer a compra do equipamento à vista ao final?

Como vimos anteriormente, a expressão que descreve o comportamento dos juros compostos é:

$$FV_n = PV(1 + i)^n$$

Na qual:

FV = valor futuro, que será resgatado e deverá ser igual ao valor do equipamento desejado = R$ 183.283,54.

PV = valor presente, que é o valor que se tem atualmente (hoje) para ser aplicado = R$ 104.000,00.

i = é a taxa de juros (taxa de crescimento) do capital (dinheiro) que irá remunerar a aplicação = 12% a.a. (lembrando que sempre nas equações os valores a serem inseridos devem ser números, e não porcentagens; assim, 12% a.a., em porcentagem, representa 12 por cem, 12/100 = 0,12, em decimal).

Substituindo os valores na equação, temos:

$$183.283{,}54 = 104.000{,}00(1 + 0{,}12)^n$$

Desenvolvendo, temos:

$$(1{,}12)^n = \frac{183.283{,}54}{104.000{,}00} = 1{,}7623$$

Para podermos resolver essa equação, temos de explicitar o prazo (n), que está no expoente da equação. Para isso, vamos utilizar o operador logaritmo, conforme foi visto acima.

Aplicando o logaritmo nos dois lados da equação, ela se mantém equilibrada (igualdade):

$$ln(1{,}12)^n = ln\ 1{,}7623$$

Pela propriedade dos logaritmos, no caso do logaritmo de uma potência, o expoente da potência pode multiplicar o logaritmo:

$$n\ .\ ln(1{,}12) = ln(1{,}7623)$$

$$n = \frac{ln(1{,}6250)}{ln(1{,}12)} = \frac{0{,}5666}{0{,}1133} = 5\ anos$$

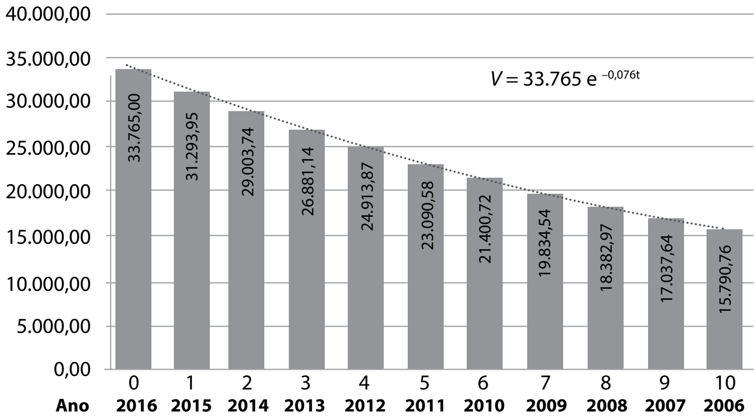
Depreciação de um ativo:

Depreciação é a perda gradual sofrida por um bem qualquer ao longo do tempo, seja pelo uso, seja pela obsolescência tecnológica. Neste exemplo, apresentaremos a depreciação de um bem de forma exponencial.

Os dados são de um automóvel pesquisado no site da Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas – Fipe (http://veiculos.fipe.org.br), observado no período de tempo de 2006 até 2016, o que gerou a tabela a seguir.

Anos de uso	Ano de fabricação	Valor de mercado (R$)
0	2016	33.765,00
1	2015	31.293,95
2	2014	29.003,74
3	2013	26.881,14
4	2012	24.912,87
5	2011	23.090,58
6	2010	21.400,72
7	2009	19.834,54
8	2008	18.382,97
9	2007	17.037,64
10	2006	15.790,76

Notamos acima que, em 2016, o veículo possui zero ano de uso, ou seja, é "zero quilômetro", e seu valor de venda foi de R$ 33.765,00. Com o passar dos anos, seu preço vai diminuindo (depreciando), e queremos estudar esse comportamento, o que é feito no gráfico abaixo:



Podemos verificar a equação exponencial que modela esse comportamento substituindo os dados de um determinado ano. Exemplo: para 2012, o veículo possuirá quatro anos de uso (2016 – 2012 = 4); substituindo na equação que representa o modelo, temos:

$$Valor_{hoje} = 33.765\ e^{-0,076x} = 33.765\ e^{-0,076\ .4} =$$
$$33.765\ e^{-0,3040} = 33.765\ .\ 0,7379$$

$$Valor_{hoje} = 24.913,87$$

Ou seja, um veículo adquirido em 2012, em 2016, possui quatro anos de uso e sofreu uma depreciação (valor veículo zero quilômetro – valor de mercado atual) de R$ 8.851,13 (R$ 33.765,00 – R$ 24.913,87).

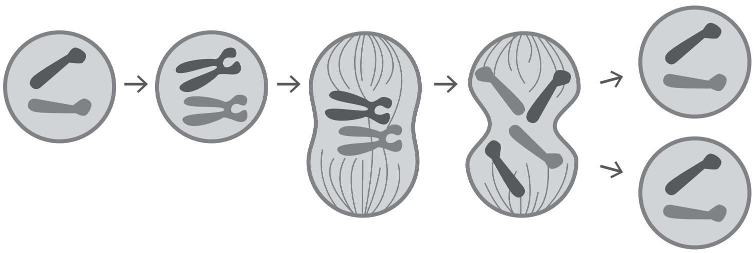
A depreciação de um bem pode ser linear, quadrática, logarítmica, potencial, polinomial, mas, nesse exemplo, estudamos o caso exponencial.

São taxas típicas de depreciação de bens, que representam o ritmo no qual eles se depreciam (têm seu valor reduzido):

- Imóveis = 4% ao ano.
- Instalações = 10% ao ano.
- Máquinas e equipamentos = 10% ao ano.
- Móveis e utensílios = 10% ao ano.
- Veículos = 20% ao ano.
- Equipamentos de informática = 20% ao ano.

Crescimento celular:

O processo de crescimento de algumas bactérias em um meio adequado pode duplicar a cada hora. Admitindo que existam inicialmente oito bactérias nessa colônia, ao fim de 10 horas de cultura, qual será o número de bactérias presentes?



Vejamos, então, que inicialmente são oito, mas, uma hora depois, esse número será duplicado, passando, então, a ser 16, que após uma hora se tornará 32, e assim sucessivamente. Logo podemos modelar esse comportamento como:

Seja uma função exponencial:

$$f(x) = k \,.\, b^{n}$$

Na qual:

K = valor inicial.

b = ritmo de crescimento.

n = tempo.

Substituindo, temos:

$$\text{Número de bactérias (t)} = 8 \,.\, 2^{t}$$

Para um tempo de 10 horas, temos:

$$\text{Número de bactérias } (10) = 8 \;.\; 2^{10} = 8 \;.\; 1.024 = 8.192 \text{ bactérias}$$

NOTA:
Utilizando as propriedades de potência, temos:

$$\text{Número de bactérias } (10) = 8 \;.\; 2^{10} = 2^{3} \;.\; 2^{10} = 2^{13} = 8.192 \text{ bactérias}$$

NOTA:
Veja que podemos aplicar o princípio que foi estudado sobre a operação da potência. Começamos com oito bactérias:

$$\text{Número de bactérias } (0) = 8 \text{ bactérias}$$

Contudo, após a primeira hora, teremos dobrado esse efetivo. Então:

$$\text{Número de bactérias } (1) = 8 \;.\; 2 = 16 \text{ bactérias}$$

Ao final da segunda hora, teremos dobrado o efetivo de bactérias da hora anterior, afinal cada bactéria gerada se duplicará, como na ilustração anterior, em que temos:

$$\text{Número de bactérias } (2) = (8 \;.\; 2) \;.\; 2 = 32 \text{ bactérias}$$

Bom, esse processo permanecerá até a décima hora, como pode ser visto abaixo:

Número de bactérias (3) = ((8 . 2) . 2) . 2 = 64 bactérias

$$\text{Número de bactérias (10)} = \left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left((8\ .2).2\right).2\right).2\right).2\right).2\right).2\right).2\right).2\right).2\right) =$$

$$8\ .\ 2\ .\ 2\ .\ 2\ .\ 2\ .\ 2\ .\ 2\ .\ 2\ .\ 2\ .\ 2\ .\ 2 = 8\ .\ 2^{10} = 8.192 \text{ bactérias}$$

Crescimento populacional:

A Secretaria Municipal de Saúde de uma prefeitura de uma cidade brasileira está elaborando o seu planejamento estratégico para a próxima década. Estudos das organizações de saúde apontam que, para que possa ocorrer um atendimento de qualidade à população, é necessário que existam pelo menos 2,6 leitos para cada 1.000 habitantes. Os dados dos institutos de pesquisa registram uma taxa de crescimento da população desse município com tendência de comportamento estável e igual a 1,6% e que atualmente a população é de 649.556 habitantes. Sabe-se também que o número de leitos atualmente é 30% inferior ao necessário segundo as normas de qualidade.

Diante das informações acima, qual deverá ser o aumento do número de leitos para que, em 10 anos, essa cidade se mantenha dentro das normas recomendadas?

Os dados do problema são:

- População atual: 649.556 habitantes.
- Taxa de crescimento: 1,6%.
- Relação de leitos adequada: 2,6 leitos/mil habitantes.
- Número de leitos atualmente: 30% inferior ao necessário.

A partir do modelo exponencial, temos:

$$y = y_0\,(1 + k)^x$$

$$P(x) = 649.556\,(1 + 0{,}016)^x$$

Em uma década (10 anos), temos a seguinte população:

$$P(10) = 649.556\,(1 + 0{,}016)^{10} = 649.556\,(1{,}016)^{10} = 649.556 \,.\, 1{,}1720 \approx 761.296$$

Para atender às normas, são necessários 2,6 leitos por 1.000 habitantes, então temos:

$$2{,}6 \longleftrightarrow 1.000$$

$$x \longleftrightarrow 761.296$$

$$x = \frac{2{,}6 \,.\, 649.556}{1.000} = 1.688{,}8456 \approx 1.689 \textit{ leitos}$$

O *deficit* é de:

$$\text{Leitos atualmente} = 1.689 \,.\, 0{,}70 \approx 1.182 \text{ leitos}$$

Então, em 10 anos, será necessário adquirir:

$$x = 1.979 \text{ leitos em 10 anos} - 1.182 \text{ leitos atuais} = 797 \text{ leitos}$$

Saiba mais sobre dados demográficos e outras estatísticas brasileiras no portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, em: <http://www.cidades.ibge.gov.br/xtras/home.php?lang>.

Curva de aprendizagem:

A primeira vez que utilizamos um mouse certamente não foi igual à experiência que temos hoje com o mesmo dispositivo. Acertar a sensibilidade do movimento com o posicionamento do cursor na tela, o uso dos botões direito e esquerdo, o clique e o clique duplo no tempo certo etc. Isso também acontece com nossas habilidades cognitivas em nossa vida pessoal e profissional.

A matemática encontrou uma forma de "medir" essa capacidade de aprendizado de uma pessoa relacionando a eficiência (habilidade que é o saber fazer) ao longo do tempo (experiência), e essa forma de avaliar pode ser modelada pela função exponencial apresentada abaixo:

$$f(x) = A - B \,.\, e^{-k.t}$$

Na qual:

A = nível de aprendizagem pleno, absoluto.

B = nível inicial de conhecimento.

k = uma constante intrínseca que varia de pessoa para pessoa.

Assim, A – B é o que falta ser aprendido.

Vejamos um exemplo:

Em uma indústria, sabe-se que a habilidade de um funcionário de montar peças por hora em uma linha de produção em relação a sua experiência (tempo em meses) é dada pela seguinte função:

$$f(x) = 80 - 60 \,.\, e^{-0,14.t}$$

A partir dessa equação, pode-se determinar, por exemplo:

a) Quando ele foi contratado, qual era a sua capacidade de montar peças por hora?

$$f(x) = 80 - 60 \,.\, e^{-0,14.0} = 80 - 60 \,.\, e^{0} =$$
$$80 - 60 \,.\, 1 = 80 - 60 = 20 \text{ peças}$$

b) Qual a capacidade produtiva desse funcionário após nove meses de trabalho?

$$f(x) = 80 - 60 \,.\, e^{-0,14.9} = 80 - 60 \,.\, e^{-1,26} = 80 - 60 \,.\, 0,2837 =$$
$$80 - 17,0192 = 62,98 \approx 63 \text{ peças}$$

c) Qual a capacidade produtiva máxima desse funcionário?

$$f(x) = 80 - 60 \,.\, e^{-0,14.\infty} = 80 - 60 \,.\, e^{-\infty} = 80 - 60 \,.\, \frac{1}{e^{\infty}} =$$

$$80 - 60 \,.\, \frac{1}{e^{\infty}} = 80 - 60 \,.\, \frac{1}{\infty} = 80 - 60 \,.\, 0 = 80 - 0 = 80 \text{ peças}$$

d) Para que a capacidade produtiva desse funcionário seja de aproximadamente 78 peças por hora, quanto tempo levará?

$$78 = 80 - 60 \,.\, e^{-0,14.x}$$

$$78 - 80 = -60 \,.\, e^{-0,14.x}$$

$$60 \,.\, e^{-0,14.x} = 2$$

$$e^{-0,14.x} = \frac{2}{60} = 0,0333$$

$$\ln e^{-0,14.x} = \ln 0,0333$$

$$-0,14x \ln e = \ln 0,0333$$

$$-0,14x = \frac{\ln 0,0333}{\ln e} = \frac{\ln 0,0333}{\ln 2,7183} =$$

$$\frac{-3,4012}{1,0000} = -3,4012$$

$$-0,14x = -3,4012$$

$$x = \frac{-3,4012}{-0,14} = +24,29 \approx 24 \text{ meses}$$

e) Qual o gráfico que representa esse comportamento?

Monta-se primeiramente uma tabela com a maior quantidade de valores possíveis, sempre utilizando a equação que modela o problema:

$$f(x) = 80 - 60 \,.\, e^{-0,14.t}$$

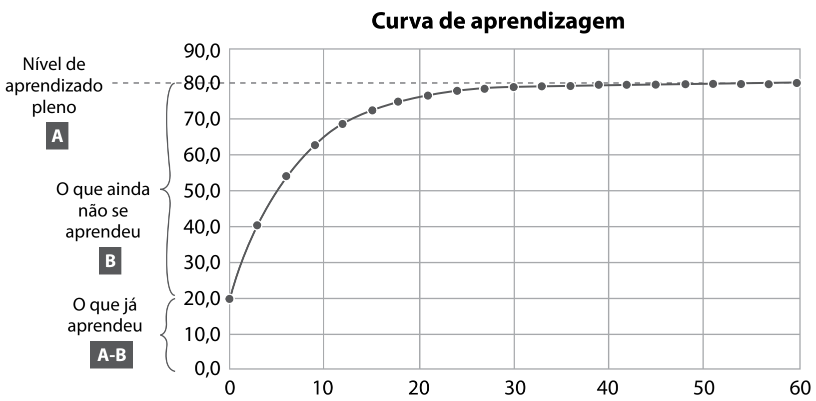
Concentrar os valores entre zero (situação inicial) e um valor acima de 30 meses, conforme já foi visto nos itens anteriores. Neste nosso exemplo, foi sendo incrementado de três em três meses.

Nesse momento, o uso de planilhas eletrônicas é especialmente interessante, por conferir maior precisão nas respostas e proporcionar grande economia de tempo.

t	f(x)
0	20,000
3	40,577
6	54,097
9	62,981
12	68,818
15	72,653
18	75,172
21	76,828
24	77,916
27	78,631
30	79,100
33	79,409
36	79,612
39	79,745
42	79,832
45	79,890

48	79,928
51	79,952
54	79,969
57	79,979
60	79,987

Em seguida, marcamos os pontos (coordenadas) em um plano cartesiano; interligando esses pontos, temos a função:



REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

CRESPO, A. A. **Matemática comercial e financeira:** fácil. 13. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

EXPONENCIAL. In: DICIONÁRIO Informal. São Paulo, 2016. Disponível em: <http://www.dicionarioinformal.com.br/EXPONENCIAL/>. Acesso em: 25 nov. 2016.

MORETTIN, P. A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. O. **Cálculo:** funções de uma e várias variáveis. São Paulo: Saraiva, 2003.

MÜLLER, F.; GARCIA, A. M. **Matemática aplicada a negócios.** Rio de Janeiro: Saraiva, 2012.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de controle moderno.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 1998.

OLIVEIRA, C. A. M. **Matemática.** Curitiba: Intersaberes, 2016. (Livro eletrônico).

SAMANEZ, C. P. **Matemática financeira.** 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Função exponencial – Aula 1 de 7:
<https://www.youtube.com/watch?v=n5NRv2cWQIg>.

Função exponencial – Aula 2 de 7:
<https://www.youtube.com/watch?v=9FGtZt84w6U>.

Função exponencial – Aula 3 de 7:
<https://www.youtube.com/watch?v=SXkjJZHM5UU>.

Função exponencial – Aula 4 de 7:
<https://www.youtube.com/watch?v=31N3orMcdVU>.

Função exponencial – Aula 5 de 7:
<https://www.youtube.com/watch?v=3EXISt9iVqg>.

Função exponencial – Aula 6 de 7:
<https://www.youtube.com/watch?v=NPBry6hE3NA>.

Função exponencial – Aula 7 de 7:
<https://www.youtube.com/watch?v=Y7gaJoRnLAY>.

CAPÍTULO 4
INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
(POR ROBERTA MENDIONDO)

Em administração e economia, a análise marginal é o estudo das taxas de variação das quantidades econômicas. Um economista, por exemplo, pode estar interessado no valor do produto interno bruto – PIB de uma economia em dado instante de tempo, mas também pode estar igualmente preocupado com a taxa pela qual esse PIB está aumentando ou diminuindo. Analogamente, um produtor agrícola não está somente interessado no custo total que corresponde a determinado nível de produção, mas também na taxa de variação do custo total com relação a seu nível de produção. Por outro lado, quando as taxas de variação são conhecidas, podemos obter a função de cuja variação conhecemos.

Em matemática, as taxas de variação estão associadas a um conceito bastante importante — a derivada de uma função —, e, se conhecermos somente a função que representa essa taxa de variação, podemos obter a função primitiva, que é a integral da função. Portanto, antes de iniciarmos o estudo das funções marginais, de especial interesse em processos de gestão, precisamos entender os conceitos de derivada e integral.

FUNÇÕES MARGINAIS E A DERIVADA

A análise marginal, essencialmente, estuda a contribuição de cada produto e/ou serviço no lucro das empresas. Ela busca responder a perguntas como: é conveniente aumentar a produção um determinado produto já existente? Que quantidade de um produto a empresa deve vender de forma que obtenha lucro com essa produção? Quais são os efeitos nos lucros da empresa quando ocorrem perturbações na demanda de um produto? É conveniente terceirizar?

As funções "receita marginal", "custo marginal" e "lucro marginal" são derivadas das funções receita, custo e lucro, respectivamente. Então, é preciso entendermos **o que é a derivada de uma função, pois a função marginal de $f'(x)$ é chamada de derivada de $f(x)$.**

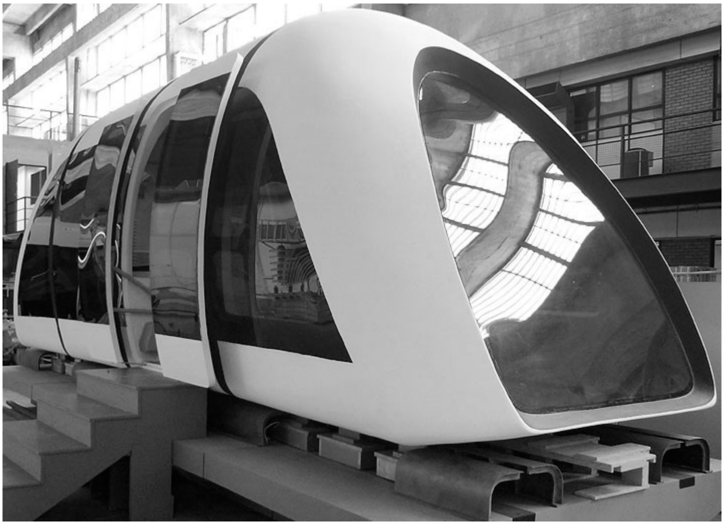
Limite de uma função

Para compreender o que significam a derivada e, em seguida, a integral de uma função, é necessário recorrer ao conceito de limite de uma função, o qual é usado para descrever o comportamento de uma função à medida que sua variável independente (x) se aproxima de um determinado valor.

Noção de limite

O conceito de limite é fundamental na construção de outros conceitos que compõem a matemática aplicada, pois, por meio da noção de limite, é possível observar o comportamento de algumas funções que variam continuamente e o comportamento de outras funções que podem variar, independentemente da maneira como suas variáveis são controladas.

Vamos observar o que ocorre com a função $f(x)$ quando x tende para um número real a utilizando um contexto de testes de um trem de levitação magnética, um *maglev*, como o desenvolvido pelo Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro – Coppe/UFRJ. (Saiba mais sobre o Maglev Cobra no endereço: <http://www.maglevcobra.coppe.ufrj.br/>.)



Fonte: <http://www.maglevcobra.coppe.ufrj.br/videos-fotos.html>.

Exemplo

Conforme dados obtidos no teste de um protótipo de *maglev* que se move ao longo de um monotrilho retilíneo, as posições do *maglev* nos instantes *t*, medidas a partir de sua posição inicial, foram:

Quadro 1 – Posições do *maglev* nos instantes *t*.

Instante *t*	0	1	2	3	10
Posição *f*(*t*)	0	4	16	36	400

Com base nos dados desse teste, os engenheiros determinaram que a velocidade média do *maglev* (em pés[1]/s) no instante *t* é dada pela seguinte função:

$$f(t) = \frac{4\,(t^2 - 4)}{t - 2}$$

Sendo *f* chamada de **função velocidade média** do *maglev*.

As posições registradas no Quadro 1 foram geradas em um experimento no qual se verificou a posição do *maglev* em cada um dos instantes registrados no quadro, mas suponha que precisemos saber a velocidade do *maglev* no instante $t = 2$, ou seja, estamos interessados na velocidade do *maglev* após dois segundos de movimento.

Temos a função $f(t)$, que nos dá a velocidade média do *maglev*, porém ela não é válida para o instante $t = 2$, pois esse valor faria com que o denominador da função supracitada fosse zero (se $t = 2$, então $t - 2 = 2 - 2 = 0$).

1 Pé é uma unidade de medida de comprimento utilizada nos Estados Unidos e no Reino Unido que equivale a aproximadamente 0,3 do metro, ou seja, um pé corresponde a 30 cm, aproximadamente.

E uma divisão por zero não é possível matematicamente, implicando que 2 não faz parte do domínio (valores de t possíveis) da função $f(t)$.

Como é do nosso interesse a velocidade do *maglev* em $t = 2$, mas não podemos aplicar $t = 2$ na equação que descreve sua velocidade média, porque 2 não está no domínio da função f, resta-nos aproximar o valor de t por uma sequência de valores:

- Menores que 2 (1,5; 1,9; 1,99; 1,999; 1,9999), o que chamamos de aproximação pela esquerda.
- Maiores que 2 (2,5; 2,1; 2,01; 2,001; 2,0001), o que chamamos de aproximação pela direita.

Os resultados constam nos quadros abaixo.

t	$f(t) = \dfrac{4\,(t^2 - 4)}{t - 2}$
2,5	$f(t) = \dfrac{4\,(2{,}5^2 - 4)}{2{,}5 - 2} = 18$
2,1	$f(t) = \dfrac{4\,(2{,}1^2 - 4)}{2{,}1 - 2} = 16{,}4$
2,01	$f(t) = \dfrac{4\,(2{,}01^2 - 4)}{2{,}01 - 2} = 16{,}04$
2,001	$f(t) = \dfrac{4\,(2{,}001^2 - 4)}{2{,}001 - 2} = 16{,}004$

2,0001	$f(t) = \dfrac{4\,(2{,}0001^2 - 4)}{2{,}0001 - 2} = 16{,}0004$

t	$f(t) = \dfrac{4\,(t^2 - 4)}{t - 2}$
1,5	$f(t) = \dfrac{4\,(1{,}5^2 - 4)}{1{,}5 - 2} = 14$
1,9	$f(t) = \dfrac{4\,(1{,}9^2 - 4)}{1{,}9 - 2} = 15{,}6$
1,99	$f(t) = \dfrac{4\,(1{,}99^2 - 4)}{1{,}99 - 2} = 15{,}96$
1,999	$f(t) = \dfrac{4\,(1{,}999^2 - 4)}{1{,}999 - 2} = 15{,}996$
1,9999	$f(t) = \dfrac{4\,(1{,}9999^2 - 4)}{1{,}9999 - 2} = 15{,}9996$

Podemos observar que, à medida que atribuímos a t valores cada vez mais próximos de dois segundos, tanto pela direita quanto pela esquerda, o valor da função (que corresponde à velocidade média do *maglev*) se aproxima de 16 pés/s. Nesse caso, dizemos que o limite de $f(t)$ quando t tende a 2 é igual a 16 e, em linguagem matemática, escrevemos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{4\,(t^2 - 4)}{t - 2} = 16$$

O que corresponde à definição informal de limite.

Limite de uma função

A função ***f*** tem limite ***L*** quando ***x*** se aproxima de ***a***, o que se denota por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Se pudermos fazer o valor de $f(x)$ tão próximo de L quanto quisermos, colocamos x suficientemente próximo (mas não igual) a a.

Derivada de uma função

Incremento

A derivada de uma função está associada à ideia de taxa de variação, e nos interessa conhecer o valor de uma função f, dada por $y = f(x)$, quando x varia de um valor inicial de x para um valor final de x; e a essa diferença entre o valor final e inicial de x chamamos incremento em x, denotado por Δx (leia-se delta x). Logo:

$$\Delta x = \text{valor final de } x - \text{valor inicial de } x$$

Como $y = f(x)$, a variação em x implica uma correspondente variação em $f(x) = y$, o que denotamos por Δy, ou seja, Δy = valor final de y – valor inicial de y.

Por exemplo, se x varia de 3 a 5 e está relacionado a y por uma função $f(x) = 2x - 1$, temos que:

Δx = valor final de x – valor inicial de $x = 5 - 3 = 2 \rightarrow \boldsymbol{\Delta x = 2}$

Como y depende de x, de forma que $y = f(x) = 2x - 1$, então precisamos calcular os valores da função f quando $x = 5$ e quando $x = 3$, para que consigamos calcular o valor de Δy. Assim:

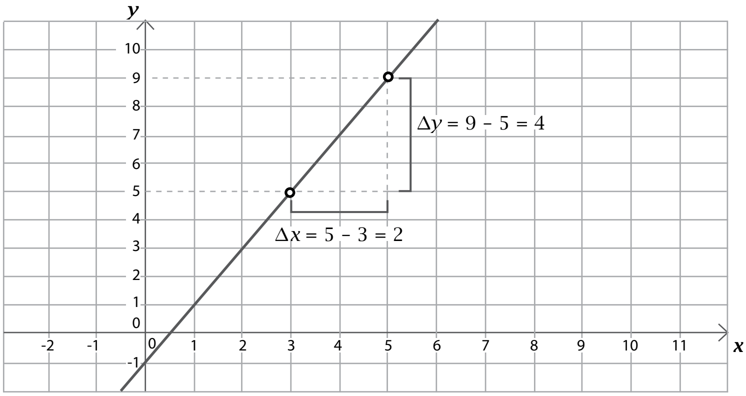
Para $x = 3$, $f(3) = 2 \,.\, 3 - 1 = 5$

Para $x = 5$, $f(5) = 2 \,.\, 5 - 1 = 9$

Portanto, o incremento no valor da função $f(x) = 2x - 1$ (incremento em y) correspondente à variação em x de 3 para 5 é igual a:

Δy = valor final de y – valor inicial de $y = 9 - 5 = 4 \rightarrow \boldsymbol{\Delta y = 4}$

O gráfico abaixo mostra Δx e Δy na função f, tal que $f(x) = 2x - 1$.



Taxa de variação média

A taxa de variação média de uma função é a medida de quanto varia o valor da função (que chamamos de $f(x)$ ou de y) quando ocorre determinada variação na variável independente, que chamamos de x, ou seja, é o quociente entre a variação em $f(x)$ e a variação em x, e é representada por:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}$$

Vamos analisar um caso de aplicação da taxa de variação média relacionada a custo de produção.

Exemplo 1

O gestor da produção da indústria moveleira Acadêmica definiu uma função que representa o custo total para produzir x unidades de uma cadeira universitária, $C(x)$, em reais. A função é dada pela equação $C(x) = 2x^2 - 0{,}5x + 10$. O gestor precisa determinar a taxa de variação média do custo total, em relação à quantidade produzida x, quando x varia de um determinado valor x_0 unidades para $x_0 + \Delta x$ unidades.

Resolução

Considerando que a taxa média de produção seja dada pela razão entre a variação no custo total de produção e a variação na quantidade produzida, $\frac{\Delta c}{\Delta x}$, e que o gestor precise determinar essa taxa de variação média, com x variando de x_0 para $x_0 + \Delta x$, teremos:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C\,(x_0 + \Delta x) - C\,(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{C\,(x_0 + \Delta x) - C\,(x_0)}{\Delta x}$$

Portanto, é necessário determinar $C(x_0 + \Delta x)$ e $C(x_0)$ para esse caso específico. Faremos isso aplicando, na função custo total de produção definida pelo gestor, $C(x) = 2x^2 - 0{,}5x + 10$, os valores de x inicial $(x = x_0)$ e final $(x = x_0 + \Delta x)$.

Para $x = x_0$, temos:

$$C(x_0) = 2x_0^{\,2} - 0{,}5x_0 + 10$$

Para $x = x_0 + \Delta x$, temos:

$$C(x_0 + \Delta x) = 2\,(x_0 + \Delta x)^2 - 0{,}5\,(x_0 + \Delta x) + 10$$

$$C(x_0 + \Delta x) = 2\,.\,x_0^{\,2} + 2\,.\,2x_0\,\Delta x + 2\,.\,\Delta x^2 - 0{,}5x_0 - 0{,}5\,.\,\Delta x + 10$$

$$C(x_0 + \Delta x) = 2x_0^{\,2} + 4x_0\,\Delta x + 2\Delta x^2 - 0{,}5x_0 - 0{,}5\Delta x + 10$$

Logo:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C\,(x_0 + \Delta x) - C\,(x_0)}{\Delta x} =$$

$$\frac{(2x_0^{\,2} + 4x_0\Delta x + 2\Delta x^2 - 0{,}5x_0 - 0{,}5\Delta x + 10) - (2x_0^{\,2} - 0{,}5x_0 + 10)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C\,(x_0 + \Delta x) - C\,(x_0)}{\Delta x} = \frac{4x_0\Delta x + 2\Delta x^2 - 0{,}5\Delta x}{\Delta x}$$

Como todos os termos do numerador da fração têm como fator o Δx, podemos colocá-lo em evidência e simplificar a fração, obtendo:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C\,(x_0 + \Delta x) - C\,(x_0)}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}\,(4x_0 + 2\Delta x - 0{,}5)}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$= 4x_0 + 2\Delta x - 0{,}5$$

Portanto, a taxa de variação média da função custo total $C(x) = 2x^2 - 0{,}5x + 10$, quando x varia de um valor inicial x_0 unidades para um valor final $x_0 + \Delta x$ unidades é:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = 4x_0 + 2\Delta x - 0{,}5$$

Exemplo 2

A Indústria Tech, de componentes eletrônicos, verificou que o custo total diário para produzir x componentes do tipo A, em reais, é dado por $C(x) = 1/2x^2 + x + 2$. O diretor da Tech precisa tomar a decisão de investir ou não em novos equipamentos; para isso, uma das informações necessárias é a taxa média de variação do custo de produção, considerando que a produção atual de 100 unidades diárias do tipo A venha a triplicar. Ele solicitou ao gestor operacional tal informação. Qual deve ser o retorno do gestor operacional para o diretor da Indústria Tech?

Resolução

O retorno do gestor operacional para o diretor deve ser o valor da taxa média de variação do custo total de produção diário dos componentes tipo A quando a quantidade produzida varia de 100 ($x_{inicial} = x_0 = 100$) para o seu triplo, ou seja, 300 unidades produzidas ($x_{final} = x_1 = 300$).

Como $C(x) = 1/2x^2 + x + 2$, temos que:

$$\Delta x = 300 - 100 = 200$$

A taxa média de variação é dada por:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C\,(x_0 + \Delta x) - C\,(x_0)}{\Delta x}$$

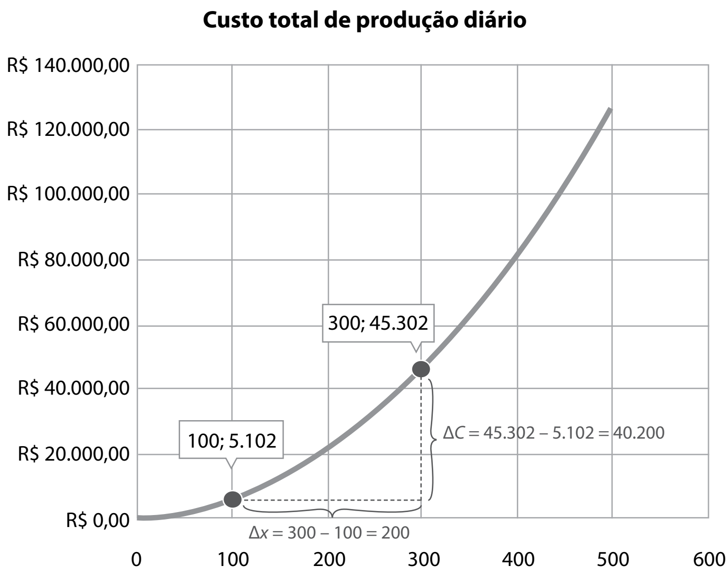
Sendo $x_0 = 100$ $\Delta x = 200$, nesse caso:

$C(x_0 + \Delta x) = C(100 + 200) = C(300) = 1/2 \,.\, 300^2 + 300 + 2 = 45.000 + 300 + 2 = 45.302$

$C(x_0) = C(100) = 1/2\ 100^2 + 100 + 2 = 5.000 + 100 + 2 = 5.102$

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{45\,.\,302 - 5\,.\,102}{200} = \frac{40.202}{200} = \mathbf{201}$$

Portanto, a **taxa média de variação do custo de produção diário** de componentes do tipo A, quando a produção passa de 100 unidades diárias para 300 unidades diárias é de **R$ 201,00 por unidade produzida**, situação apresentada no gráfico abaixo.



A partir do desenvolvimento da **taxa de variação média** e da **noção de limite**, podemos definir a **derivada de uma função** como **limite da taxa de variação média quando Δx tende a zero**, o que equivale ao limite da variação do valor da função *f* em relação à variação em *x*, quando esta diminui a ponto de se aproximar de zero.

Derivada de uma função

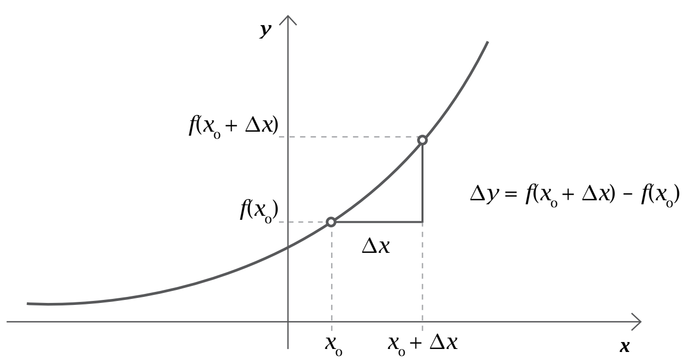
A derivada de uma função $\boldsymbol{f}$ em relação à variável $\boldsymbol{x}$ do domínio de $\boldsymbol{f}$ é a função $\boldsymbol{f'(x)}$, dada por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se esse limite existir, dizemos, nesse caso, que a função $f(x)$ é derivável em x.

Derivada da função em um ponto

Consideremos uma função f contínua e definida em um intervalo [a, b], sendo x_o e $(x_o + \Delta x)$ dois pontos desse intervalo. Quando a variável x passa do valor x_o para o valor $(x_o + \Delta x)$, sofrendo uma variação Δx, o correspondente valor da função passa de $f(x_o)$ para o valor $f(x_o + \Delta x)$, sofrendo, portanto, uma variação que chamamos Δy, em que $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$, conforme mostra a figura seguinte:



A **derivada da função *f* no ponto x_0** é dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Se esse limite existir e for finito, dizemos que *f* é derivável no ponto x_0, ou seja, existe $f'(x_0)$.

Há outras notações para representar a derivada de uma função, como:

$$f'(x),\quad y',\quad \frac{df}{dx},\quad \frac{dy}{dx} \quad \rightarrow \text{função derivada}$$

$$Df(x_0),\quad y'(x_0),\quad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0},\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} \quad \rightarrow \text{derivada no ponto em que } x = x_0$$

Importante: taxas de variação média e instantânea

Quando calculamos a derivada de uma função no ponto, ela é associada à taxa de variação no ponto em que $x = x_0$, sendo x_0 um valor qualquer do domínio de *f*. Por outro lado, quando calculamos a taxa de variação média, estamos calculando a variação média sofrida pelos valores da função em um intervalo do domínio da função *f*, ou seja, quando *x* passa do valor x_0 para o valor $(x_0 + \Delta x)$.

Se a variável independente *x* for associada a alguma unidade de medida de tempo, chamamos a taxa de variação no ponto de taxa de variação instantânea. Por exemplo, em um movimento retilíneo, a derivada da função distância percorrida em relação ao tempo é a velocidade escalar, ou seja, a taxa de variação instantânea da distância percorrida em relação ao tempo é a velocidade escalar.

O que vemos no velocímetro do carro é a velocidade (derivada da distância em relação ao tempo) média ou instantânea?

PaulPaladin / Shutterstock.com

Como vemos na imagem, o velocímetro de automóvel registra a velocidade, em km/h, a cada instante de movimento, ou seja, a velocidade instantânea, que equivale à derivada no ponto (instante de tempo *t*).

A velocidade média é uma taxa de variação média, e não instantânea. A velocidade média é calculada pela razão entre a variação da distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la:

$$v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Sendo $s(t)$ é a função que determina a distância percorrida.

Definimos a **velocidade instantânea $v(t_0)$**, no instante t_0, como sendo **o limite da velocidade média no intervalo de t_0 a $(t_0 + \Delta t)$, quando Δt tende a zero,** e escrevemos:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Resumindo, temos a taxa de variação no ponto, ou instantânea, associada à ideia de derivada de uma função e, por outro lado, a taxa de variação média, que é o quociente entre a variação no valor da função (que costumamos chamar de $f(x)$ ou de y) e a variação na variável independente (que costumamos chamar de x), conforme o quadro abaixo.

Derivada no ponto

Taxa de variação média	**Taxa de variação no ponto ou taxa de variação instantânea**
Variação média sofrida pelos valores da função em um intervalo do domínio da função f, isto é, quando x passa do valor x_0 para o valor $(x_0 + \Delta x)$.	Limite da taxa de variação média no intervalo de x_0 a $(x_0 + \Delta t)$, quando Δx tende a zero ou limite da taxa de variação média no intervalo de t_0 a $(t_0 + \Delta t)$, quando Δt tende a zero.
$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}$	$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$ $f'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$

Nesse momento, vamos atribuir valor para x_0 e considerar Δx tendendo a zero para calcular a derivada no ponto.

Exemplo 1

O PIB de um certo país era dado por $N(t) = t^2 + 5t + 100$ bilhões de dólares t anos após 2000.

Qual era a taxa de variação do PIB em 2005?

Resolução

É um problema de taxa de variação média ou instantânea?

Como 2005 ocorre cinco anos após o ano de 2000 e a taxa de variação instantânea no ano de 2005 (conforme pede o problema) é dada pela derivada no ponto da função $N(t)$, estamos interessados na derivada da função $N(t)$ no ponto $t = 5$, ou seja, $N'(5)$.

Pela definição, a derivada é calculada por:

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Neste caso específico:

$$N'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t_0 + \Delta t) - N(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(5 + \Delta t) - N(5)}{\Delta t}$$

Como

$N'(5 + \Delta t) = (5 + \Delta t)^2 + 5 \,.\, (5 + \Delta t) + 100 = 25 + 2 \,.\, 5 \,.\, \Delta t + \Delta t^2 + 25 + 5\Delta t + 100 = 150 + 15\Delta t + \Delta t^2$

$N(5) = 5^2 + 5 \,.\, 5 + 100 = \mathbf{150}$

Temos:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(5+\Delta t) - N(5)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(150 + 15\Delta t + \Delta t^2) - 150}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t^2 + 15\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{\Delta t}(\Delta t + 15)}{\cancel{\Delta t}} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta t + 15)$$

Fazendo $\Delta t \to 0$, $\lim_{\Delta t \to 0} (\overset{0}{\cancel{\Delta t}} + 15) = \mathbf{15}$

Portanto, a taxa de variação instantânea do PIB $N(t) = t^2 + 5t + 100$, em 2005, é de 15 bilhões de dólares, o que equivale a dizer que a derivada da função $N(t)$ quando $t = 5$ é igual a 15, ou, ainda, $\underbrace{N'(5)}_{\text{Derivada da função } N(t),\ t=5.} = \underbrace{15}_{\text{Valor da derivada de } N(t),\ t=5.}$**.**

Exemplo 2

O Instituto de Pesquisas e Estudos Sociais – Ipes desenvolveu um estudo a partir de dados históricos, o que lhe permitiu descrever a população da cidade de Grandina, daqui a x meses, pela função de $P(x) = x^2 + 20x + 8.000$. Determine:

a) A taxa média de variação da população de Grandina do início do terceiro mês até daqui a 27 meses.

b) A variação da população da cidade de Grandina daqui a um ano.

Resolução

a) Atualmente corresponde a $x_0 = 3$, e daqui a 27 meses, $x_1 = 27$, $\Delta x = 27 - 3 = 24$. Portanto, o que precisamos fazer é calcular:

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \text{(taxa de variação média)}$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{P(x_0 + \Delta x) - P(x_0)}{\Delta x}$$

Para $x = (x_0) = 3$

$P(0) = 3^2 + 20 \,.\, 3 + 8.000 = 9 + 60 + 8.000 = 8.069$

Para $x = (x_0 + \Delta x) = (0 + 24) = 24$

$P(24) = 24^2 + 20 \,.\, 24 + 8.000 = 576 + 480 + 8.000 = 9.056$

Logo,

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{P(x_0 + \Delta x) - P(x_0)}{\Delta x} = \frac{9.056 - 8.069}{24} = \frac{1.056}{24} =$$

$$= \frac{987}{24} = \mathbf{41{,}12^*}$$

* 41,12 não faz sentido na realidade desse problema, que trata de população, ou seja, de pessoas; assim, podemos dizer que aproximadamente 41 (pessoas) é o resultado.

Portanto, a taxa de crescimento (variação) média da população da cidade de Grandina é de, aproximadamente, 41 pessoas por mês. No período de três a 27 meses a partir da data em que foi modelada, a equação que retorna sua população é $P(x) = x^2 + 20x + 8.000$.

b) Daqui a um ano corresponde a $x = 12$ meses, e a taxa de variação, nesse momento, equivale à derivada no ponto. Assim, o que precisamos calcular é $P'(12)$. Como a derivada no ponto é dada por:

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, sendo, nesse caso:

$$P'(12) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(12 + \Delta x) - P(12)}{\Delta x}$$

$(12 + \Delta x) = (12 + \Delta x)^2 + 20 \,.\, (12 + \Delta x) + 8.000 = 122 + 2 \,.\, 12 \,.\, \Delta x + \Delta x^2 + 240 + 20\Delta x + 8.000$

$P(12 + \Delta x) = 144 + 24\Delta x + \Delta x^2 + 240 + 20\Delta x + 8.000 = \Delta x^2 + 44\Delta x + 8.384$

$P(12) = (12)^2 + 20 \,.\, 12 + 8.000 = 144 + 240 + 8.000 = 8.384$

Logo,

$$P'(12) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(12 + \Delta x) - P(12)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 44\Delta x + 8.384 - 8.384)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 44\Delta x}{\Delta x} =$$

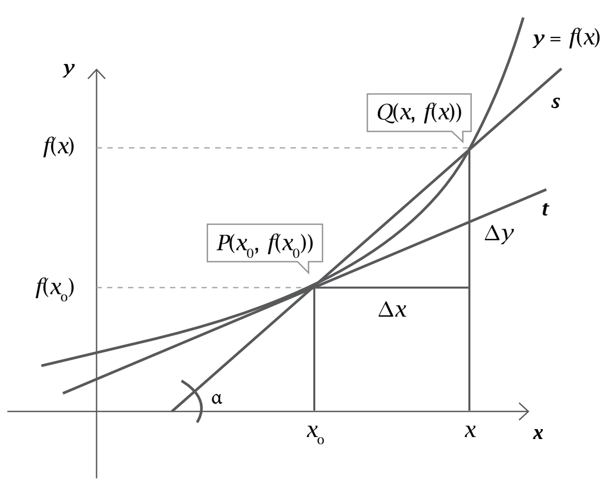
$$\mathbf{P'(12)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(\Delta x + 44)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} (\cancelto{0}{\Delta x} + 44) = \mathbf{44}$$

Portanto, a taxa de crescimento (variação) instantânea da população da cidade de Grandina daqui a **12 meses será de 44 pessoas por mês**, conforme a equação modelada pelo Ipes que retorna sua população: $P(x) = x^2 + 20x + 8.000$. De outra maneira, podemos dizer que a **derivada no ponto da função *P*(*x*), quando *x* = 12, é igual a** 44, ou, ainda, ***P*'(12) = 44.**

Interpretação geométrica da derivada

A derivada de uma função, em determinado ponto, tem um significado geométrico importante, sendo associado à inclinação da reta tangente à curva que representa tal função nesse ponto.

Sendo $f(x)$ uma função contínua e a derivável em um domínio D e a representação de seu gráfico sendo o da figura a seguir, considere uma função f, e os pontos $\boldsymbol{P(x_o, f(x_0))}$ e $\boldsymbol{Q(x_o + \Delta x, f(x_o + \Delta x))}$, sabendo que $x = x_0 + \Delta x$. A reta ***s*** que passa pelos pontos ***P*** e ***Q*** é secante ao gráfico de $\boldsymbol{f(x)}$, e, à medida que $\Delta \boldsymbol{x}$ se aproxima de zero, a reta ***s*** vai mudando sua inclinação em relação ao eixo dos ***x*** (alterando seu coeficiente angular), até que a reta ***s*** se torna tangente à curva $y = f(x)$ no ponto ***P*** (ficando sobre a reta ***t***).

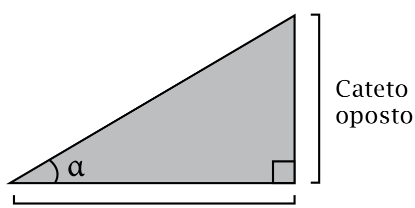


Quando fazemos **Δx se aproximar cada vez mais de zero**, ao calcular **o limite da razão $\Delta y/\Delta x$, temos a derivada de $f(x)$**, que geometricamente **corresponde ao coeficiente angular da reta tangente à curva, que passa por um ponto P conhecido.**

Veja uma animação que mostra a reta secante *r* se aproximando da reta tangente *t* à medida que a variação e $x(\Delta x)$ vai diminuindo (se aproximando de zero), no endereço: <https://www.youtube.com/watch?v=7PH_MTaqbG4>.

Relação entre derivada e tangente

Como sabemos da trigonometria, no triângulo retângulo, a razão entre o cateto oposto ao ângulo considerado e o cateto adjacente ao mesmo ângulo é igual à tangente desse ângulo.



$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}\text{, no caso do gráfico de } f(x),$$

$$acima\ tg\ \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\mathbf{tg\ \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)}\text{, **derivada no ponto em que** } \mathbf{x = x_0}.$$

A reta tangente *t* pode ser determinada e, como é uma reta, sua equação sempre será do tipo $\boldsymbol{y = ax + b}$, que equivale a $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$.

Quando calculamos a derivada em um certo ponto x_0 do domínio da função *f*, se ela existir, temos a inclinação da reta *t* e, portanto, só precisamos do coeficiente linear *b* para que tenhamos a equação da reta *t* completamente determinada.

Exemplo

Determinar a reta tangente à curva dada por $f(x) = x^2$ no ponto A (2, 4).

A derivada de $f(x)$ em $x = 2$ é igual à inclinação da reta tangente. Derivando $f(x)$, temos:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 4}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(4+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \overset{0}{\cancel{\Delta x}}) = \mathbf{4}$$

Assim, o coeficiente angular a, da reta tangente a $f(x)$, é igual a $4f'(x) = 4$. Temos, então, que a equação da reta tangente tem a forma $\boldsymbol{f(x) = 4x + b}$.

O ponto A (2, 4) é o ponto da função $f(x)$ por onde passa a reta tangente *t*, então A é um ponto da reta tangente;

dessa forma, ele tem que satisfazer a equação dessa reta $t(x) = 4x + b$.

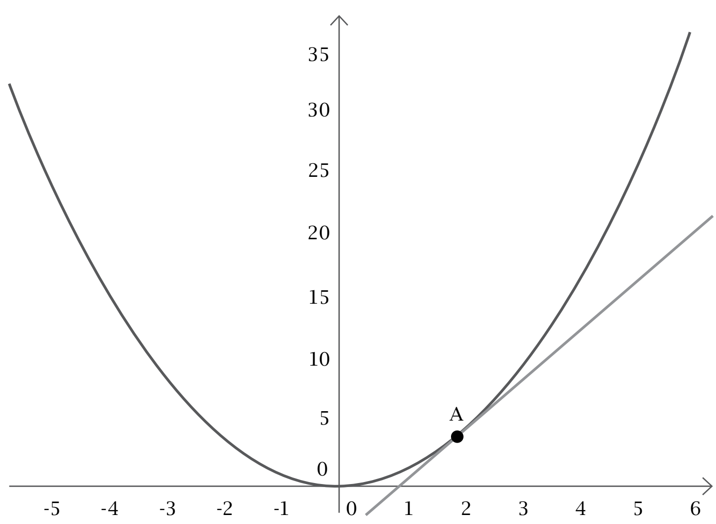
Aplicando (2, 4) na equação da reta tangente $t \rightarrow$

$4 = 4 \cdot 2 + b$

$4 - 8 = b \rightarrow b = -4$

Portanto, a equação da reta *t*, tangente a $f(x)$ no ponto A (2, 4), é $\boldsymbol{t(x) = 4x - 4}$, ou, de outro modo, $\boldsymbol{y = 4x - 4}$.

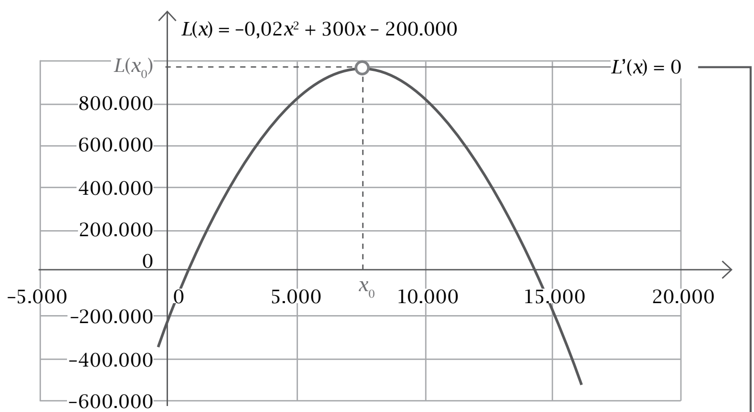
Abaixo, segue o gráfico que mostra a curva que descreve a função *f* e a tangente *t* pelo ponto A (2 , 4).



Derivada = 0

Uma observação importante que se estabelece a partir da compreensão da associação entre a derivada e a inclinação da reta tangente a uma curva por um ponto é a de que, quando esse ponto encontra-se em um local onde a reta tangente à curva passando por esse ponto seja horizontal, a inclinação em relação aos eixos das abcissas (eixo dos *x*) será igual a zero, isto é, a derivada no ponto será igual a zero. Esses pontos da curva ocorrem em pontos de máximo e de mínimo locais.

Para ilustrar, considere a função de lucro cujo gráfico é apresentado abaixo.



Como a derivada é a inclinação da reta tangente à curva $L(x)$, com relação ao eixo dos x, no ponto de máximo $(X_0, L(x_0))$ essa inclinação é nula, já que a tangente é horizontal. Por isso, a derivada é igual a zero.

Nessa função de lucro $L(x)$, há um ponto em que ocorre o maior lucro (representado no eixo vertical), o que chamamos de um ponto de máximo. Nesse caso, o ponto cinza é um ponto de máximo, e a inclinação da reta tangente à curva de $L(x)$ passando por esse ponto é igual a zero, o que equivale a dizer que, **em pontos de máximo ou de mínimo locais, a derivada da função sempre será igual a zero**, isto é,

$$\boldsymbol{L'(x_0) = 0}$$

Em que x_0 é a abcissa do ponto de máximo, ou de mínimo.

Esse resultado é importante porque, frequentemente, interessa-nos saber quando ocorre o lucro máximo, por exemplo, e, para solucionar essa questão, podemos lançar mão do conhecimento a respeito da derivada nesse ponto, pois sabemos que nele a derivada é nula.

Do mesmo raciocínio, podemos concluir que a derivada de funções constantes, da forma $f(x) = K$, sendo K um número real, tem derivada igual a zero, pois toda função constante tem como gráfico uma reta paralela ao eixo dos x; portanto, a tangente a qualquer ponto dessa reta estará sobre ela, com inclinação em relação ao eixo dos x igual a zero.

Regras de derivação

O cálculo da derivada utilizando sua definição pode se tornar bastante trabalhoso, dependendo da função que queremos derivar, mas a partir dela são definidas algumas regras, as quais podem ser aplicadas, agilizando bastante a obtenção da derivada.

Seja $f(x)$ uma função de x, então temos as seguintes regras de derivação**:

FUNÇÃO	DERIVADA
i) Se $f(x) = k$	$f'(x) = 0$
ii) Se $f(x) = x^n$	$f'(x) = n \,.\, x^{n-1}$ n = *número racional*
iii) Se $f(x) = g(x) + h(x)$	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$
iv) Se $f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

** Há outras regras de derivação, porém as que constam no quadro acima são suficientes para os cálculos necessários para este curso.

Exemplos

i) Para funções constantes:

$$f(x) = 10 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = -0{,}5 \rightarrow f'(x) = 0$$

ii) Para funções racionais:

Se $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2 \,.\, x^{2-1} = 2x^1 = 2x$

Se $f(x) = \frac{1}{3} x^3 \rightarrow f'(x) = 3.\ \frac{1}{3} x^{3-1} = f'(x) = \cancel{3}.\ \frac{1}{\cancel{3}} x^{3-1} \rightarrow f'(x) = x^2$

Se $f(x) = x^{3/4} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}.\ x^{3/4-1} = \frac{3}{4} x^{3/4\ -\ 4/4\ =\ 1/4} = \frac{3}{4} x^{1/4} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{1/4}$

iii) Para soma de funções:

Se $f(x) = x^4 + 5$, aplicando a regra para derivada da soma de funções temos:

$g(x) = x^4 \rightarrow g'(x) = 4 \, . \, x^{4-1} = 4x^3$

$h(x) = 5 \rightarrow h'(x) = 0$

$f'(x) = 4 \, . \, x^3 + 0 \rightarrow f'(x) = 4x^3$

ANÁLISE MARGINAL

Passaremos a nos ocupar de uma aplicação das derivadas bastante relevante para o contexto de gestão de qualquer área da economia: as funções marginais, que são custo marginal, receita marginal e lucro marginal.

A variação de uma quantidade em relação a outra pode ser obtida a partir da **taxa média de variação** e também **da variação instantânea, a qual chamamos de marginal.** O conceito de taxa média de variação expressa a variação de uma quantidade sobre um conjunto específico de valores de uma segunda quantidade. Por outro lado, o conceito de marginal significa a mudança instantânea na primeira quantidade, que resulta de uma mudança em unidades — em geral muito pequena — na segunda quantidade. Em avaliações econômicas, a **análise marginal** se refere ao uso de derivadas de funções para estimar a variação ocorrida no valor da variável dependente quando ocorre o acréscimo de uma unidade no valor da variável independente.

Custo marginal

Suponha que $C(x)$ seja o custo total de produção de x unidades de um certo produto. A função C é chamada de **função custo total.** De forma geral, x e $C(x)$ são positivas, pois, como x representa o número de unidades de um produto, x tem que ser não negativo. As funções de custo marginal são associadas à derivada da função de custo total e de custo médio. Assim, trataremos das funções **custo mar-**

ginal e **custo médio marginal** nos preocupando especialmente com a interpretação econômica dessas derivadas.

Custo médio marginal

O **custo médio** da produção de cada unidade do produto é obtido dividindo-se o custo total pelo número de unidades produzidas, ou seja, chamamos de *CM* a função custo médio:

$$CM = \frac{CM\,(x)}{x} \qquad (1)$$

A derivada da função custo médio ***CM'*** é chamada de função **custo médio marginal** e mede a taxa de variação da função custo médio com relação ao número de unidades produzidas.

Exemplo

A partir de um estudo sobre os dados da produção gerados no sistema integrado utilizado pela Têxteis S.A., o modelo de custo total para produzir x unidades de seu principal produto, a calça jeans, é descrito pela equação $C(x) = 400 + 20x$, em reais. A direção da empresa solicitou um estudo sobre o custo médio de produção, para que possa tomar decisões sobre possíveis investimentos em tecnologia de fabricação e redução de custos.

Analise as funções de custo médio, gerando informações que possam subsidiar o processo de tomada de decisão da direção da Têxteis S.A.

Resolução

O custo médio de produção $CM(x)$ da Têxteis S. A., referente à calça jeans, é dado pela função de custo total $C(x)$ dividida pela quantidade produzida x, assim:

$$CM = \frac{C(x)}{x} = \frac{400 + 20x}{x} = \frac{400}{x} + \frac{20x}{x} = \frac{400}{x} + 20$$

O custo médio marginal (taxa de variação do custo médio) de produção da calça jeans é igual à derivada da função custo médio, ou seja, $CM'(x)$; assim, escrevendo a função custo médio na forma $CM = 400x^{-1} + 20$, teremos:

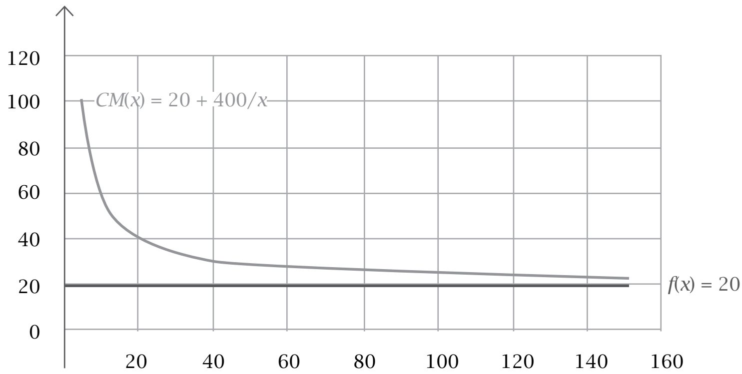
$$CM'(x) = -1\,.400x^{-1-1} + 0 = -400x^{-2} = \frac{-400}{x^2}$$

$$CM'(x) = -\frac{400}{x^2}$$

Como a função custo médio marginal é negativa para todos os valores admissíveis de x, a taxa de variação da função custo médio é negativa para todo $x > 0$, ou seja, $CM(x)$ decresce à medida que x cresce. Porém, o gráfico da função $CM(x)$ se encontra sempre acima da reta horizontal $f(x) = 20$, mas se aproxima da reta, já que:

$$\lim_{x \to \infty} CM(x) = \lim_{x \to \infty} \left(20 + \frac{400}{x}\right) = 20$$

Segue um esboço do gráfico da função custo médio $CM(x)$:



Note que, enquanto o nível de produção aumenta (x cresce), o custo fixo por unidade, representado por $(400/x)$, decai constantemente. O preço médio se aproxima do custo constante de uma unidade de produção, que é de R$ 20,00, nesse caso.

Custo marginal

Em economia, usa-se o termo custo marginal para o limite do quociente dado pela equação (1), quando a variação na quantidade produzida (Δx) tende a zero, desde que o limite exista. Esse limite é a derivada no ponto do custo de produção quando a quantidade produzida é igual a x_1, ou seja, a derivada de $C(x)$ no ponto em que $x = x_1$; portanto, a definição de **custo marginal** será:

> Se $C(x)$ é o custo de produção de x unidades de um certo produto, então o **custo marginal**, quando $x = x_1$, é dado por $C'(x_1)$, caso exista. A função C' é chama-

da **função custo marginal** e frequentemente é uma boa aproximação do custo de produção de uma unidade **adicional**.

Na definição acima, $C'(x)$ pode ser interpretada como a taxa de variação do custo total quando x_1 unidades são produzidas. Matematicamente, a função custo marginal é dada por:

$$C_{Mg} = C'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x_0 + \Delta x) - C(x_0)}{\Delta x}$$

Valem para a função custo marginal as mesmas regras de derivação estudadas até aqui.

Frequentemente, interessa-nos aproximar o valor do custo se for produzida uma unidade a mais do que já está sendo produzido, e, para esse fim, a função custo marginal nos auxilia.

Vejamos, no exemplo a seguir, as aplicações da função custo marginal e médio.

Exemplo

A Eletros S.A. produz refrigeradores e sabe que seu custo total é dado pela função $C(x) = 8.000 + 200x - 0{,}2x^2$, em dólares.

a) Qual o custo total envolvido na fabricação da 251ª unidade?

b) Qual a taxa de variação do custo total, com relação à quantidade produzida, quando ocorre a produção de 250 unidades?

c) Qual o custo médio quando são produzidos 250 refrigeradores?

d) Qual a taxa de variação do custo médio, considerando a produção de 250 unidades?

Resolução

a) O custo real envolvido na produção do 251º refrigerador é igual à diferença entre os custos de produção totais dos primeiros 251 refrigeradores e o custo total dos primeiros 250 refrigeradores, ou seja:

$C(251) - C(250) = [8.000 + 200(251) - 0{,}2(251)^2] - [8.000 + 200(250) - 0{,}2(251)^2]$

$C(251) - C(250) = 45.599{,}8 - 45.500 = 99{,}8$

Portanto, o **custo real** incorrido na produção do 251º refrigerador, é igual a 99,80 dólares.

b) A taxa de variação de C, com relação a x, é dada pela derivada de C.

Derivando $C(x)$ pelas regras da função potência e soma de funções:

ii) Se $f(x) = x^n$	$f'(x) = n \,.\, x^{n-1}$ n = *número racional*
iii) Se $f(x) = g(x) + h(x)$	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Temos, então:

$C'(x) = 0 + 1 \,.\, 200x^{1-1} - 2 \,.\, 0{,}2x^{2-1}$

$C'(x) = 200 \,.\, x^0 - 0{,}4x^1$

$C'(x) = 200 - 0{,}4x$

Assim, quando a produção for de 250 refrigeradores, a taxa de variação do custo total com relação a x será dada por:

$C'(250) = 200 - 0{,}4 \,.\, (250) = 100$

Portanto, 100 dólares é o **custo aproximado** da produção da 251ª unidade de refrigerador produzida pela Eletros, pois a derivada de $C'(x)$, ou seja, a função custo marginal, aproxima o custo de produção da "próxima" unidade (x + 1).

c) O custo médio é dado por $CM = \dfrac{C(x)}{x}$; logo, o custo médio quando $x = 250$ é:

$$CM = \frac{[8.000 + 200(250) - 0{,}2(251)^2]}{250} = \frac{45.500}{250} = 5.001$$

Portanto, o custo médio de produção das 250 primeiras unidades é de 5.001 dólares por unidade.

d) A taxa de variação do custo médio é o custo médio marginal, dado pela derivada da função custo médio, $CM'(x)$; nesse caso, interessa-nos quando são produzidas 250 unidades, ou seja, $x = 250$. Queremos calcular, então, $CM'(250)$.

$CM(x) = 8.000 + 200x - 0{,}2x^2$,

$$CM(x) = \frac{8.000 + 200x - 0{,}2x^2,}{x} = \frac{8.000}{x} + \frac{200x}{x} - \frac{0{,}2x.\cancel{x}}{\cancel{x}} =$$

$$\frac{8000}{x} + 200 - 0{,}2x$$

$$CM(x) = \frac{8.000}{x} + 200 - 0{,}2x$$

$$CM(250) = \frac{8.000}{250} + 200 - 0{,}2 \;.\; 250 = 32 + 200 - 50 = \mathbf{182}$$

Portanto, a **taxa de variação do custo médio**, considerando a produção de 250 unidades, é de 182 dólares.

Receita marginal

Uma função receita $R(x)$ retorna a receita obtida por uma empresa, ou pessoa, com a venda de x unidades de determinado produto ou serviço. Se o preço cobrado por cada unidade é igual a p, temos que:

$$R(x) = p \;.\; x$$

Por outro lado, o preço que uma empresa cobra por seu produto depende do mercado em que ela atua. Caso a empresa seja uma de muitas em seu mercado, o preço pode ser determinado pelo equilíbrio de mercado, mas, se a empresa é a única fornecedora de um certo produto, nesse contexto de monopólio, ela pode controlar o preço pela oferta. O preço unitário de venda do produto p está relacionado com a quantidade de produtos vendidos x. Essa relação entre p e x é chamada equação de demanda. Resolvendo a equação de demanda para p em termos de x, obtemos a função preço unitário f, dada por:

$$p = f(x)$$

E a função receita é dada por:

$$R(x) = px = x \,.\, f(x)$$

Receita marginal

A receita marginal é o faturamento conseguido com a venda de uma unidade a mais de um bem, dado que as vendas já se encontram em um determinado nível. A relação entre as funções de custo total e custo marginal é a mesma estabelecida entre as funções receita total e receita marginal. Nesse sentido, a função receita marginal é aproximada pela derivada da função receita total, ou seja, $R'(x)$.

Receita marginal = $R'(x)$

Sendo $R(x)$ a função receita total.

Exemplo

Suponha que a relação entre o preço unitário p, em reais, e a quantidade demandada x de cada módulo do sistema integrado ERP1 seja dada pela equação:

$$p = -0{,}02x + 400 \qquad (0 \le x \le 20.000)$$

Determine

a) A função receita.

b) A função receita marginal.

c) $R'(2.000)$ e interprete seus resultados.

Resolução

a) A função receita é dada por:

$R(x) = p \,.\, x$

$R(x) = (-0{,}02x + 400) \,.\, x$

$R(x) = -0{,}02x^2 + 400x \qquad (0 \leq x \leq 20.000)$

b) A função receita marginal $R'(x)$ é dada por:

$R'(x) = 2 \,.\, -0{,}02x^{2-1} + 1 \,.\, 400x^{1-1} = -0{,}04x^1 + 400\overset{=1}{x^0} = -0{,}04x$
$+ 400 \,.\, 1$

$R'(x) = -0{,}04x + 400$

c) Como $R'(x) = -0{,}04x + 400$

$R'(2000) = -0{,}04(2.000) + 400 = 320$

Assim, a receita real obtida na venda do 2.001º módulo do sistema ERP1 é de aproximadamente R$ 320,00.

Lucro marginal

A função lucro L é dada por:

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

Em que R e C são as funções receita e custo, e x é o número de unidades do bem produzidas e vendidas. A função **lucro marginal** $L'(x)$ mede a taxa de variação da função lucro $L(x)$ e fornece uma aproximação do lucro, ou da perda, no momento da venda da $(x + 1)$-*ésima* unidade do bem (assumindo que a x-ésima unidade já tenha sido vendida).

$$\textbf{Lucro marginal} = \boldsymbol{L'(x) = [R(x) - C(x)]'}$$

Sendo $L(x)$ a função lucro.

Exemplo

Considere o exemplo anterior, sobre a receita obtida com a venda de cada módulo do sistema ERP1, e que a função de custo total seja dada por $C(x) = 100x + 200.000$, em reais. Determine:

a) A função lucro $L(x)$.

b) A função lucro marginal.

c) O valor de $L'(2.000)$ e interprete seu resultado.

d) Um esboço do gráfico de $L(x)$.

Resolução

a) Da solução do exemplo anterior (sobre receita do ERP1), temos que $R(x) = -0,02x^2 + 400x$. Portanto, a função de lucro solicitada é dada por:

$$L(x) = [(-0,02x^2 + 400x - (100x + 200.000)]$$
$$\mathbf{L(x) = -0,02x^2 + 300x - 200.000}$$

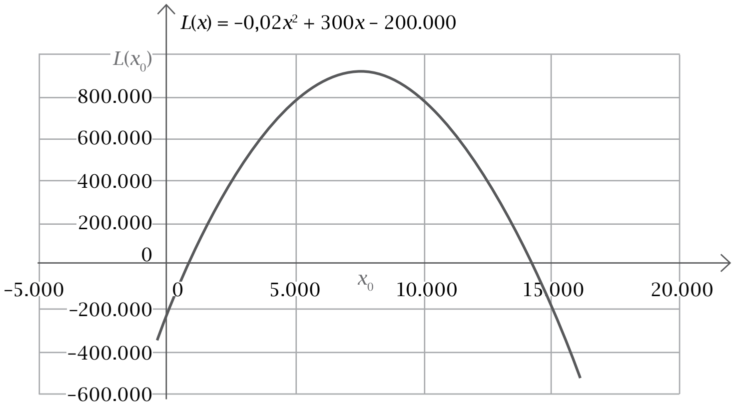
b) A função lucro marginal é dada por $L'(x)$, derivada da função $L(x)$.

$L(x) = -0,02x^2 + 300x - 200.000$
$L'(x) = 2 \,.\, -0,02 \,.\, x^{2-1} + 1 \,.\, 300 \,.\, x^{1-1} - 0$
$L'(x) = -0,04x + 300$

c) $L'(2000) = -0,04 \,.\, 2000 + 300 =$ **220**

Portanto, o **lucro real obtido com a venda da 2.001ª unidade** de módulo do sistema ERP1 é de, aproximadamente, R$ 220,00.

d) Gráfico de $L(x)$:



A figura acima mostra o gráfico que descreve o lucro obtido com a venda de *x* módulos de sistema ERP1.

INTEGRAL DE UMA FUNÇÃO

O cálculo diferencial ocupa-se do problema de determinar a taxa de variação de uma quantidade em relação a outra. Já o cálculo integral resolve o problema oposto, ou seja, se conhecemos a taxa de variação de uma quantidade em relação a outra, podemos determinar, pela integral, a relação entre essas duas quantidades.

Em contextos nos quais nos interessam funções como as de custo, receita e lucro, o cálculo integral retornará a função da qual conhecemos a função marginal. Por exemplo, se é dada a função receita marginal, teremos como estabelecer a relação entre receita e quantidade vendida (função receita) por meio do cálculo integral.

Função primitiva

No estudo da derivada, tínhamos uma função e, a partir dela, obtínhamos uma outra função, à qual chamamos de derivada. Neste momento, seguiremos o caminho inverso: a partir da derivada da função, vamos obter a função da qual temos a derivada. A essa função original, chamamos de primitiva.

Uma função $F(x)$ é chamada primitiva da função $f(x)$ em um intervalo I se, para todo $x \in I$, tem-se:

$$F'(x) = f(x)$$

Em outras palavras, a primitiva de uma função $f'(x)$ é uma função que, se for derivada, gera $f(x)$. A função primitiva costuma ser chamada de $F(x)$.

Exemplo

Suponha que a função receita marginal referente à venda do equipamento de som AG-5 seja dada por $R_{Mg}(x) = 80 - x + x^2$. Determine a função receita total.

Resolução

$R_{Mg}(x) = R'(x)$, sendo $R(x)$ a função receita. Portanto, conhecemos a derivada de $R(x)$ e precisamos determinar quem é $R(x)$.

Quando derivamos $R(x)$, temos $R'(x) = 80 - x + x^2$, que é a função receita marginal. Logo:

i) Se a derivada do primeiro termo é 80, então, antes de derivar, o termo era igual a $80x$, pois se não vemos o x é porque seu expoente ficou igual a zero quando da derivação, uma vez que, como x elevado a zero é igual a 1, ao multiplicar 80, o resultado é o próprio 80.

ii) Se a derivada do segundo termo é $-x$, então, antes de derivar, x estava elevado a uma unidade a mais, e esse expoente igual a 2 passou a multiplicar x; como só vemos -1, esse 2 foi dividido por -2.

iii) Se x^2 é a derivada do terceiro termo, seu expoente antes da derivação era igual a 3, e esse 3 passou a multiplicar x. Como não o vemos, certamente foi dividido por 3.

$$R(x) = 80x^{0+1} - 2 \cdot \frac{x^{1+1}}{2} + 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{3} = 80x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$R(x) = 80x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ → primitiva da função receita marginal = função receita

Importante

Sendo

$$R(x) = 80x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

a primitiva da função $R'(x) = 80 - x + x^2$, a função $R'(x)$ será a derivada de qualquer função que tenha a forma $[R(x) + K]$, $K \in IR$, porque a derivada de uma constante é igual a zero, qualquer que seja essa constante. Observe:

a) Se k = 0 em

$R(x) = 80x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$, então

$$R(x) = 80x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 0 \rightarrow R'(x) = 80x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

b) Se k = 100 em

$R(x) = 80x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + 100$, então

$$R(x) = 80x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 0 \rightarrow R'(x) = 80x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

c) Se $K = -\frac{3}{4}$ em

$$R(x) = 80x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}, \text{ então}$$

$$R(x) = 80x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + 0 \rightarrow R(x) = 80x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Segue, então, a definição:

> Seja I um intervalo dos números reais. Se F é uma função primitiva da função f no intervalo I, então, para qualquer constante K, a função $G(x)$ dada por $G(x) = F(x) + k$ é também uma primitiva de $f(x)$.

Integral indefinida

O processo de determinar todas as primitivas (ou antiderivadas) é chamado integração (ou antidiferenciação). O sinal da integral $\int$ indica que a operação de integração deve ser realizada sobre uma função f. Assim:

$$\int f(x)dx = F(x) + K$$

Leia-se "a integral indefinida de $f(x)dx$ em relação a x é igual a $F(x)$ mais K".

A interpretação é a de que a integral indefinida de f é a família de funções dada por $F(x) + K$, em que $F'(x) = f(x)$.

A função f a ser integrada é denominada integrando, e a constante K é chamada de constante de integração. A expressão dx que acompanha o integrando $f(x)$ indica que a operação é executada em relação a x. Se a variável independente for t, escreveremos $\int f(t)dt$.

Regras de integração

FUNÇÃO	DERIVADA
i) Se $f(x) = k$	$\int k \,.\, dx = k \,.\, x + C$
ii) Se $f(x) = x^n$	$\int x^n \,.\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
iii) Se $f(x) = g(x) + h(x)$	$\int [g(x) + h(x)]dx = \int g(x)dx + \int h(x)dx$
iv) Se $k \,.\, f(x)$	$\int k \,.\, f(x)dx = k \,.\, \int f(x)dx + C$
v) Se $f'(x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$

Exemplos

i) $\int 2dx = 2x + C$

ii) $\int x^5 \,.\, dx = \dfrac{x^{5+1}}{5+1} + C = \dfrac{x^6}{6} + C$

iii e iv) $\int 3x^2 + 9dx = \int 3x^2\, dx + \int 9dx = 3 \,.\, \int x^2 + 9x =$

$$3 \,.\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) + 9x = x^3 + 9x + C$$

Exemplo de aplicação

A circulação atual de uma revista é de 3.000 exemplares por semana. O editor-chefe da revista projeta uma taxa de crescimento dada por $4 + 5t^{2/3}$ exemplares por semana, daqui a t semanas, pelos próximos três anos. Com base em sua projeção, qual será a circulação da revista daqui a 125 semanas?

Resolução

Vamos chamar de $c(t)$ a função que retorna a circulação daqui a t semanas, logo $c'(t)$ é a taxa de variação da circulação na t-ésima semana, dada por $c'(t) = 4 + 5t^{2/3}$.

A circulação atual de 3.000 exemplares semanais se traduz em $c(0) = 3.000$, ou seja, o valor da função circulação quando $t = 0$ é de 3.000. Logo, integrando a equação diferencial (derivada, taxa de variação) em relação a t, temos:

$$C(t) = \int (4 + 5t^{2/3})dt = 4t + 5\left(\frac{t^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\right) + C = 4t + 3t^{5/3} + C$$

Para determinar o valor de C (constante de integração), usamos a condição $c(0) = 3.000$. Logo:

$$\underbrace{c(0)}_{300} = 4 \,.\, (0) + 3 \,.\, (0^{5/3}) + C$$

$$3.000 = 0 + 0 + C \rightarrow \mathbf{C = 3.000}$$

Substituindo o valor de C, a circulação da revista daqui a t semanas é dada por $\mathbf{c(t) = 4t + 3t^{5/3} + 3.000}$.

Em particular, a circulação daqui a 125 semanas será de:

$$C(125) = 4(125) + 3(125^{5/3}) + 3.000 = \mathbf{12.875}$$

Portanto, a estimativa é a de que a circulação seja de **12.875 exemplares semanais daqui a 125 semanas.**

Integral definida

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, a integral definida de $f(x)$ de a até b é a diferença:

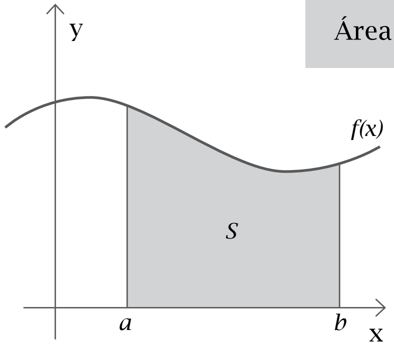
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Em que F é a primitiva de $f(x)$, isto é, a integral definida é a variação líquida da primitiva entre $x = a$, chamada de limite inferior de integração, e $x = b$, chamada de limite superior de integração.

Interpretação geométrica da integral definida

Considere a função $f(x)$ representada no gráfico abaixo:

Área $S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$



A área S (região destacada), limitada pelas linhas verticais $x = a$ e $x = b$, pelo eixo x e pelo gráfico de $f(x)$, pode ser calculada por meio de uma integral, definida de a até b.

Se a curva $y = f(x)$ está acima do eixo horizontal no intervalo de interesse:

Se f é uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e se **$f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$**, conforme figura acima, então o número de unidades quadradas na área da região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$ é igual a:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Se a curva $y = f(x)$ está abaixo do eixo horizontal no intervalo de interesse:

$$\text{Área} = \int_a^b - f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx = -[F(b) - F(a)]$$

Exemplo

A gerência da Gerdone determinou que a função custo marginal associada à produção diária de uma determinada barra metálica é dada por $C(x) = 0{,}00006x^2 - 0{,}006x + 4$, em que $C(x)$ é medida em reais por unidade e x denota o número de unidades produzidas. O custo fixo diário envolvido nessa produção é de R$ 100,00. Determine o custo total diário da Gerdone para produzir:

a) As primeiras 500 unidades de barra metálica.

b) Da 201ª unidade à 400ª unidade.

Resolução

a) Como o custo marginal é igual a $C'(x)$, sua primitiva é a função custo total $C(x)$. A informação de que o custo fixo diário é de R$ 100,00 nos permite aplicar $C(0) = 100$. Precisamos calcular $C(500) - C(0)$, isto é, a variação líquida da função custo total $C(x)$ no intervalo [0, 500], ou seja, vamos calcular a integral definida de $C'(x)$ de $x = 0$ a $x = 500$.

$$\int_0^{500} C'(x)dx = -\int_0^{500} (0{,}00006x^2 - 0{,}006x + 4)dx = 0{,}000002x^3 - 0{,}003x^2 + 4x \Big|_0^{500}$$

$$= [0{,}000002(500)^3 - 0{,}003(500)^2 + 4(500)] - [0{,}000002(0)^3 - 0{,}003(0)^2 + 4(0)] = 1.500$$

Portanto, $C(500) = 1.500 + C(0) = 1.500 + 100 = 1.600$, de modo que o custo total diário que a Gerdone tem ao produzir 500 barras metálicas é de R$ 1.600,00.

b) O custo total diário que a Gerdone tem na produção da 200ª unidade à 400ª unidade de barra metálica é dado por:

$$\int_{200}^{400} C'(x)dx = -\int_{200}^{400} (0{,}00006x^2 - 0{,}006x + 4)dx = 0{,}000002x^3 - 0{,}003x^2 + 4x \Big|_{200}^{400}$$

$$=[0{,}000002(400)^3 \ \ 0{,}003(400)^2 + 4(400)] - [0{,}000002(200)^3 \ \ 0{,}003(200)^2 + 4(200)] = 552$$

Portanto, o custo total diário da Gerdone incorrido na produção da 200ª barra à 400ª barra é igual a R$ 552,00, equivalente à integral definida de $C'(x)$ de $x = 200$ a $x = 400$.

Problemas propostos

1) O diretor de operações de uma fábrica de móveis escolares modelou o custo total de produção de kits sala de aula C, em função da quantidade de kits fabricados q, e esse modelo descreve que $C(q) = 2q^2 + q + 9$, por semana, em reais. A produção atual é de 50 unidades semanais. Para avaliar a viabilidade de aumento na produção, uma das informações que o diretor de operações deseja obter é o custo de produção da próxima unidade de kit sala de aula, considerando o nível de produção atual.

a) Qual função retorna a informação de que o diretor precisa?

b) Qual seria esse valor?

Respostas:

a) Função custo marginal, pois a derivada da função de custo aproxima o valor de uma unidade adicional. Se ele quiser obter o valor exato, deve utilizar $C(51) - C(50)$.

b) $C'(q) = 4x + 1 \rightarrow C'(50) = 4 \,.\, 50 + 1 = 201$ reais.

2) Suponha que o custo total para fabricar x unidades de um determinado produto agrícola seja $C(x) = 3x^2 + 5x + 10$.

a) Encontre o custo marginal.

b) Determine, usando análise marginal, o custo de produção para a 51ª unidade.

c) Determine o custo real de produção da 51ª unidade.

Respostas:

a) $C'(x) = 6x + 5$

b) $C'(50) = 305$

c) $C(51) - C(50) = 308$

3) A função de custo total semanal incorrido na fabricação de celulares pela Noka Tech é dada por $C(x) = 0{,}000003x^3 - 0{,}04x^2 + 200x + 70.000$ reais. Determine a função custo médio marginal.

Respostas:

$$CM'(x) = 0{,}0000006x - 0{,}04 - \frac{70.000}{x^2}$$

4) A demanda semanal por tablets da Orange é dada por $p = -0{,}02x + 300 \quad (0 \leq x \leq 15.000)$, em que p indica o valor unitário por atacado, em reais, e x representa a quantidade demandada. A função de custo total semanal associado com a fabricação desses tablets é dada por:

$$C(x) = 0{,}000003x^3 - 0{,}04x^2 + 200x + 70.000 \text{ reais.}$$

Determine:

a) A função receita R e a função de lucro L.

b) As funções receita marginal, custo marginal e lucro marginal.

c) As funções $C'(3.000)$, $R'(3.000)$ e $L'(3.000)$ e interprete seus resultados.

Respostas:

a) $R(x) = -0{,}02x^2 + 300x$

b) $R'(x) = -0{,}04x + 300$, $C'(x) = 0{,}000009x^2 - 0{,}08x + 200$, $L'(x) = 0{,}000009x^2 - 0{,}04x + 100$

c) $C'(3.000) = 41$. Quando o nível de produção já é de 3.000 tablets, o custo real para produzir um tablet adicional é de aproximadamente R$ 41,00.

Então, $R'(3.000) = 180$, ou seja, a receita a ser obtida com a venda do 3.001º tablet é de, aproximadamente, R$ 180,00.

Por fim, $L'(3.000) = 139$, isto é, o lucro com a venda do 3.001º tablet é de aproximadamente R$ 139,00.

5) A taxa de consumo de energia elétrica de certo município cresce exponencialmente com uma constante de crescimento k = 0,04. Se a taxa atual de consumo for de 40 milhões de quilowatts-hora (kWh) por ano, qual deve ser a produção total de energia elétrica, ao longo dos próximos três anos, para atender à demanda estimada?

Resposta:

127,5 milhões de quilowatts-hora.

Neste capítulo, você estudou as definições de derivada e integral e as aplicações referentes às funções marginais, bastante utilizadas em contextos de gestão de qualquer área da atividade econômica.

Inicialmente, foram estudadas noções sobre limite de uma função, para, então, passarmos ao estudo da derivada e da análise marginal, contemplando as funções receita marginal, custo marginal e lucro marginal, funções derivadas das funções de receita, custo e lucro. Com a análise marginal, podemos aproximar receita, custo e lucro da próxima unidade quando já se está em determinado nível de produção.

Na última parte do texto, foi introduzido o cálculo integral, que nos retorna uma função primitiva quando conhecemos a sua taxa de variação (derivada), aplicado às funções de receita, custo e lucro.

Esse estudo permitirá que você gere subsídios importantes para os processos de tomada de decisão de que participará ao longo de sua atuação profissional.

REFERÊNCIAS

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limite, derivação, integração. 5. ed. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1992.

GOLDSTEIN, L. J.; LAY, D. C.; SCHNEIDER, D. I. **Matemática aplicada:** economia, administração e contabilidade. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

LEITHOLD, L. **Matemática aplicada à economia e administração.** São Paulo: Harbra, 1988.

MORETTIN, P. A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. O. **Cálculo:** funções de uma e várias variáveis. São Paulo: Saraiva, 2003.

MÜLLER, F.; GARCIA, A. M. **Matemática aplicada a negócios.** Rio de Janeiro: Saraiva, 2012.

TAN, S. T. **Matemática aplicada à administração e economia.** São Paulo: Cengage Learning, 2014.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No primeiro capítulo discorremos sobre o módulo linear, Função do 1º grau, e desenvolvemos uma fundamentação técnica e teórica capaz de proporcionar-lhe uma sólida e intuitiva compreensão dos conceitos básicos necessários para seguir carreira na área de gestão e finanças. Abordamos aqui aspectos relativos às funções mais usuais dentro da economia, com ênfase em aplicações e abordagem voltadas para a resolução de problemas de cunho prático.

No segundo capítulo, discorremos sobre o módulo quadrático, função do 2º grau, muito comum em aplicações nas ciências e em economia. Logo, você pôde estudar situações práticas envolvendo as funções do 2º grau, com atenção especial ao vértice da parábola. Vimos também que as coordenadas do vértice são úteis para a determinação de valores máximos, valores mínimos e intervalos de crescimento (ou decrescimento) das funções associadas.

No terceiro capítulo, discorremos sobre o modelo exponencial — função exponencial —, que possibilitou o estudo do comportamento de fenômenos como juros compostos, depreciação, curva de aprendizagem, comportamento de crescimento e decrescimento de grandezas como população. O uso desse tipo de modelagem, com o apoio de ferramentas digitais de cálculo como planilhas eletrônicas, possibilita avanços significativos por meio de simulações e representações gráficas para a compreensão e análise do fenômeno em estudo, necessário a uma tomada de decisão correta.

Por fim, no quarto capítulo, abordamos a análise marginal, que é o estudo das taxas de variação das quantidades econômicas (em administração e economia), uma vez que, quando as taxas de variação são conhecidas, podemos obter a função de cuja variação conhecemos. Em matemática, as taxas de variação estão associadas a um conceito bastante importante: a derivada de uma função. Portanto, iniciamos o estudo das funções marginais, de especial interesse em processos de gestão, para que pudéssemos entender os conceitos de derivada e integral.

Desejamos, assim, que o conhecimento adquirido da matemática aplicada a partir do estudo desta obra seja bastante útil para auxiliá-lo em seus estudos, ajudando-lhe a compor o conhecimento necessário para o desempenho de sua carreira profissional.

Os autores