

Apresentação

A Pesquisa Operacional (PO) trata de resolver problemas para os quais se deseja encontrar a melhor solução possível, a solução ótima. Ela se relaciona com a matemática e a estatística e é de extrema relevância para diversas áreas profissionais, inclusive no campo da gestão financeira.

As técnicas utilizadas em estudos de pesquisa operacional são variadas e podemos citar como as mais conhecidas e utilizadas a simulação, a programação linear, a análise PERT, CPM, teoria das filas, dentre outras.

Atualmente, a resolução dos problemas, em geral, ocorre por meio de aplicativos, e em PO alguns são muito utilizados como o Solver do Excel (programação linear), ProModel e Arena (simulação), dentre outros.

Para que você construa conhecimentos consistentes em PO é importante estudar e entender os conceitos, construir modelos matemáticos que reflitam o problema real e desenvolver competências relacionadas ao uso de ferramentas computacionais adequadas.

Bons estudos!

Dedicatória

Dedico esse trabalho à minha família, que constantemente me apoia, ama e colabora para que meus dias sejam felizes e cheios da presença de Deus.

Minicurrículo da autora



A professora Roberta Fernandes Menciondo Nunes é graduada em Matemática desde 2000, pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. É mestre em Engenharia pelo Instituto Federal Fluminense (2012) e especialista em Educação a distância e em Educação Profissional e Tecnológica pelo Instituto Brasileiro de Formação (2020).

Ministra disciplinas de Pesquisa Operacional, Estatística e Probabilidade, Matemática Aplicada, Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, dentre outras, nas graduações em Engenharia, Sistemas da Informação, Economia, Administração e pós-graduações na área.

Currículo Lattes: <<http://lattes.cnpq.br/8359063230116377> >

Unidade 1 - Introdução à pesquisa operacional

Roberta Fernandes Menciondo Nunes

Objetivos da unidade

- Descrever o que é pesquisa operacional;
- Identificar problemas na administração, onde as teorias matemáticas e as técnicas e métodos utilizados em pesquisa operacional podem ser aplicadas;
- Conhecer as fases necessárias de um estudo em pesquisa operacional para a resolução de problemas reais;
- Descrever um modelo de programação linear.

Tópicos de estudo

- **Definição de pesquisa operacional (PO)**
 - **Evolução da PO**
 - **Como a pesquisa operacional pode ser definida?**
- **Fases de um estudo de PO**
 - **Elaboração do problema**
 - **Construção do modelo e desenvolvimento dos cálculos**
 - **Testagem do modelo e da solução e controle das soluções**
 - **Implantação e acompanhamento**
- **Problemas clássicos e práticos em PO**
 - **Problemas de mistura**
 - **Problemas de mix de produção**
 - **Problemas práticos**
- **Técnicas e métodos utilizados em PO**
 - **Programação linear**
 - **Outras técnicas**

Definição de pesquisa operacional (PO)

A PO aborda a modelagem matemática de fenômenos **estáticos** ou **dinâmicos**, de diferentes áreas e com diversos objetivos associados à otimização. Podemos dizer que a PO se divide em dois campos, o que trata de problemas estáticos e o que trata de problemas dinâmicos.

Os problemas estáticos são chamados de **problemas determinísticos**. O que significa dizer que todos os elementos são conhecidos previamente e não são admitidas aleatoriedades em suas ocorrências. Trata-se de um problema que pode ser resolvido por meio do famoso método simplex, deve ter sido modelado por meio da programação linear, a qual trata de problemas determinísticos.

Já nos problemas dinâmicos, que são chamados de **problemas estocásticos**, os seus componentes apresentam alguma probabilidade de ocorrência em uma certa forma.

O Diagrama 1 associa os tipos de fenômenos aos tipos de problemas em PO.



Diagrama 1. Tipos de problemas em PO.

A PO emergiu da necessidade de uma gestão eficiente das operações militares, durante a Segunda Guerra Mundial, ou seja, das exigências de otimização da tática e estratégia militares.

Ao longo do tempo, com inovações metodológicas e computacionais, aliadas às demandas de diferentes campos, a PO passou a tratar de diversos tipos de problemas.

A PO é uma ferramenta do que chamamos de matemática aplicada, permitindo que:

- Problemas reais sejam resolvidos;

- Ocorram tomadas de decisão baseadas em fatos, dados e correlações quantitativas;
- Sistemas sejam concebidos, planejados, analisados, implementados, operados e controlados por meio da tecnologia e de métodos de outros campos do conhecimento;
- Custos sejam minimizados e lucros maximizados;
- A solução ótima seja encontrada, isto é, a melhor solução para um problema seja conhecida previamente.

Evolução da PO

Um dos métodos mais difundidos de PO é a programação linear, por sua simplicidade e eficiência, embora a ela já utilize métodos que envolvem, inclusive, inteligência artificial.

A expressão pesquisa operacional (PO) deriva de *operational research*, termo que foi usado, inicialmente, em 1939, na Inglaterra, associado ao surgimento do radar, que reconhecia inimigos, nas terras britânicas. Atualmente, PO é traduzida como *Business Analytics* (BA).

Durante a Segunda Guerra Mundial, a PO contou com rápida evolução, quando foi empregada por grupos de cientistas multidisciplinares, os quais resolviam problemas de natureza militar no que se referia à logística, tática e estratégia.

CURIOSIDADE

As palavras tática e estratégia, muitas vezes, são usadas como se fossem sinônimos, mas são diferentes. A estratégia pode ser entendida como a elaboração do planejamento contemplando os objetivos maiores de uma organização, por exemplo. O planejamento tático trata da implementação de ações nas diferentes áreas da organização, de forma que se atinja os objetivos definidos no planejamento estratégico. No campo militar podemos considerar que a estratégia trata do planejamento para vencer uma guerra, enquanto a tática trata de como vão ocorrer cada uma das batalhas.

Um outro exemplo de representação que pode ser usado em estudo de PO, inclusive de natureza militar, são os grafos. Um **grafo** é uma representação gráfica das relações existentes entre elementos, onde cada vértice (ponto de interesse) é representado por um círculo, e uma trajetória é representada por um segmento de reta, e se essa curva possuir indicação de sentido (uma seta), ela é chamada de arco, caso contrário, é chamada de linha.



Figura 1. Exemplo de grafo. **Fonte:** Shutterstock. Acesso em: 20/09/2020.

ID: 334528877

Com o final da guerra, a evolução da PO continuou, em função da aplicação do método científico, ou seja, da formulação de modelos matemáticos, que permitiam a identificação do problema em estudo, bem como o ensaio e avaliação dos resultados hipotéticos estimados pelas estratégias ou decisões alternativas, sendo todo esse processo baseado em dados e fatos.

Em 1947, o Pentágono implantou, nos EUA, um projeto cujo objetivo era o de apoiar os processos de tomada de decisões operacionais da força aérea americana. George Dantzig desenvolveu o método simplex para a resolução de problemas de programação linear.

Vinte anos depois, em 1967, o periódico *Operational Research* propôs uma definição para PO:

uma aplicação de métodos científicos a problemas complexos para auxiliar no processo de tomadas de decisão, tais como projetar, planejar e operar sistemas em situações que requerem alocações eficientes de recursos escassos (ARENALES e colaboradores, 2007).

No Brasil, em 1968, no Instituto Tecnológico da Aeronáutica, ocorreu o primeiro Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional e, em 1969, surgiu a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional - SOBRAPO.

Como a pesquisa operacional pode ser definida?

Não existe uma única definição para PO e sim, várias definições apresentadas por diferentes autores.

A PO pode ser considerada uma ideia muito abrangente acerca da busca de um **melhor uso** (em termos técnicos, econômicos, sociais e políticos) **de recursos** (que são escassos) **e processos** diversos, por meio da **implementação de métodos científicos** com o **objetivo de satisfazer o cliente** (usuário, público) definido em um contexto.

A PO é uma área de conhecimento que trata do estudo, desenvolvimento e aplicação de métodos analíticos que contribuem com o processo de tomada de decisões mais acuradas, em diversos campos da atuação humana.

Sob uma perspectiva acadêmica, as inovações tecnológicas possibilitam a abordagem de problemas cada vez maiores e mais complexos, e isso impulsiona o desenvolvimento de métodos analíticos mais sofisticados, que se encontram em contínua evolução, permitindo novas áreas de implementação.

Podemos observar na Diagrama 2, aspectos envolvidos no estudo de um problema a partir da PO.

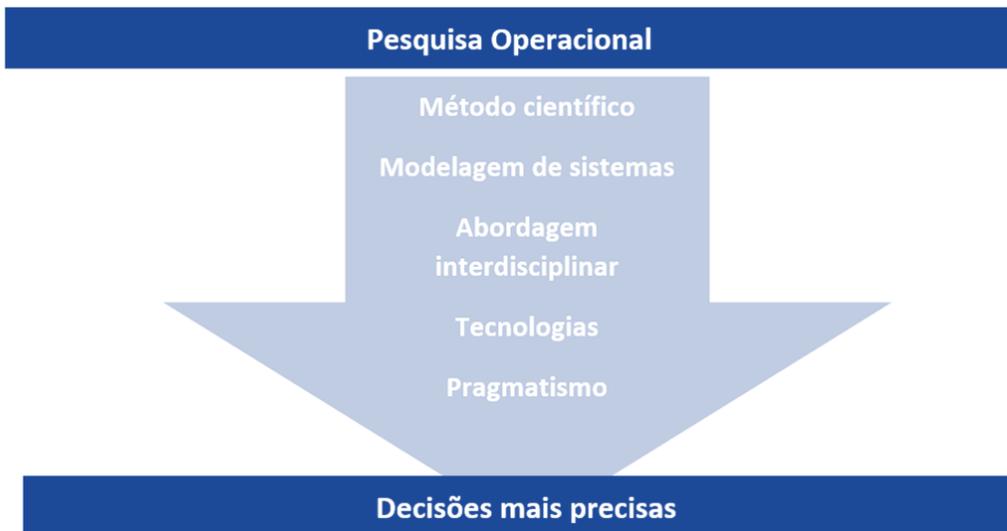
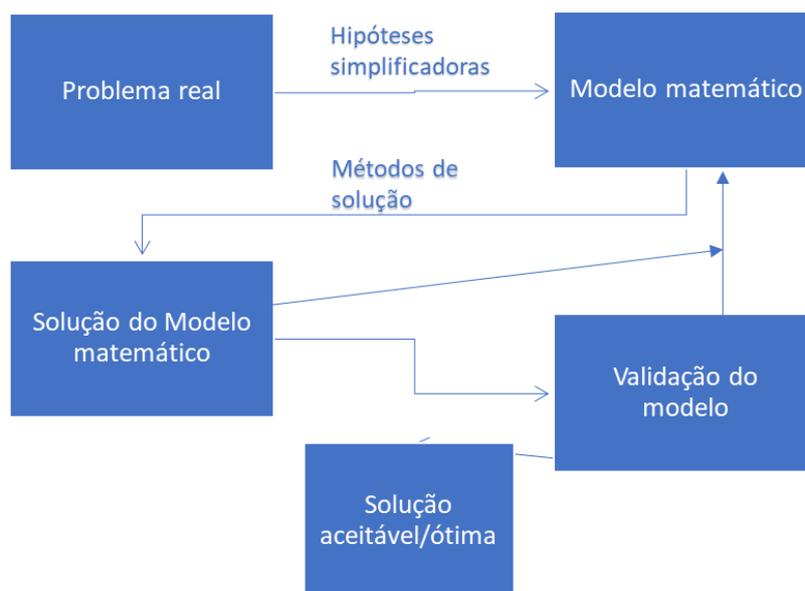


Diagrama 2. Aspectos da PO.

Um projeto de PO segue algumas etapas, que podem ser implementadas por meio de diferentes métodos matemáticos. De forma geral, o **início do estudo trata do problema real**, que **modelado matematicamente**, permite encontrar uma **solução que otimiza os resultados**.

O fluxo de um projeto de PO, em linhas gerais, pode ser observado no Fluxograma 1:



Fluxograma 1. Projeto de PO.

Questão proposta

O estudo de um problema por meio da PO:

- a) parte de um problema real, que modelado matematicamente pode ter sua solução otimizada;
- b) parte de um modelo matemático, representado na realidade, que pode ter sua solução otimizada;
- c) parte da otimização da solução de um problema real, que modelado qualitativamente pode ter sua solução otimizada;

Justificativa: Na PO temos um problema real, que é modelado matematicamente, e só então passa pelo processo de otimização para encontrar a solução ótima.

[objeto de aprendizagem]

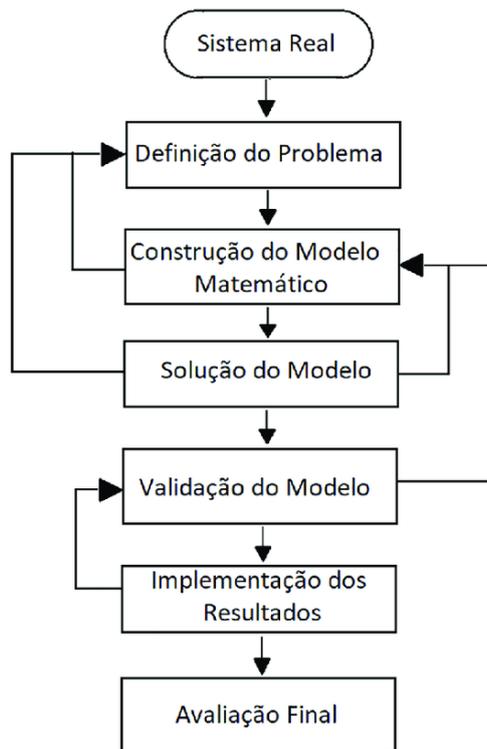
FASES DE UM ESTUDO DE PO

Podemos considerar seis etapas para a resolução de um problema por meio da PO:

1. Elaboração do problema;
2. Construção do modelo matemático;
3. Desenvolvimento dos cálculos com uso do modelo;
4. Testagem do modelo e da solução;
5. Controle das soluções;
6. Implantação e acompanhamento.

O estudo de um problema por meio desse percurso em seis fases tem como objetivo encontrar uma solução ótima.

O Fluxograma 2 mostra, de acordo com Belfiore e Favero (2013), como as fases de um estudo de PO podem ser representadas.



Fluxograma 2. Fases de um estudo de PO. **Fonte:** Belfiore e Favero (2013, p. 6).

Elaboração do problema

Nessa fase, os objetivos são determinados, as restrições são identificadas e são esboçadas as possibilidades de percursos para resolução. Também são verificados os registros, momento em que as informações são coletadas com a maior precisão e consistência possíveis.

Construção do modelo e desenvolvimento dos cálculos

Predominantemente, a construção do modelo ocorre por meio da modelagem matemática, ou seja, com uso de equações e inequações, tanto na função objetivo, quanto nas restrições.

Nesse momento, é preciso decidir quais são as variáveis de decisão, e quais não são controláveis no problema real. Por exemplo, em um contexto de produção, a quantidade

produzida é uma variável controlável, já a demanda e o preço são exemplos de variáveis não controláveis, pois são definidas no mercado.

A resolução ou cálculo do modelo é a fase na qual encontramos a solução por meio da aplicação de diversas técnicas, das mais simples até as mais complexas, que são escolhidas dependendo das características e complexidade de cada problema.

Atualmente, são usados aplicativos para a resolução dos problemas em PO, que resolvem matematicamente problemas bastante complexos de forma rápida, confiável e acurada.

EXEMPLIFICANDO

Alguns exemplos de aplicativos utilizados em PO são:

- Suplemento Solver do Microsoft Excel;
- What'sBest!, LINGO e LINDO API, da LINDO Systems;
- MapleSim, Bordo, Global Optimization Toolbox, da Maplesoft.

Testagem do modelo e da solução e controle das soluções

Na fase de testagem, verifica-se se os resultados encontrados satisfazem o modelo real do problema. Depois da implantação, uma simulação pode identificar a eventual necessidade de outras soluções, buscando melhorias.

Na fase de controle das soluções, parâmetros e valores fixos que envolvem o problema precisam ser identificados, pois com esse controle é possível verificar possíveis desvios ocorridos ao longo do processo. Se houver variações nos parâmetros, devem ser realizadas correções no modelo matemático.

Implantação e acompanhamento

Nessa última fase são avaliadas as vantagens e validados os resultados da solução obtida para que estas sejam convertidas em regras operacionais. A implementação é

1) Problemas de mix de produção

Problemas sobre mix de produção tratam da decisão sobre quais produtos devem ser fabricados e quanto fabricar de cada um, em um certo período. Nesse sentido, considerando a capacidade de produção limitada de máquinas, recursos humanos, capital, armazenagem, dentre outros, e os diferentes produtos que compõem o mix da empresa, o **objetivo é definir quais dos produtos devem ser fabricados e quanto fabricar de cada um, de forma que a empresa obtenha o maior lucro possível (maximização), em certo período.**

Exemplo: mix de produção

A empresa Essencial precisa planejar a produção de suas essências. Para isso, são necessários dois tipos de insumos, a mão de obra e os materiais. A Essencial produz três tipos de essências, A, B e C, cada uma com necessidades diferentes quantidades de mão de obra e de materiais, por unidade produzida, conforme dados a seguir.

- Essência A: 7 horas de mão de obra, 4 gramas, lucro de R\$ 4,00
- Essência B: 3 horas de mão de obra, 4 gramas, lucro de R\$ 2,00.
- Essência C: 6 horas de mão de obra, 5 gramas, lucro de R\$ 3,00.

E a disponibilidade de mão de obra é de 15 horas por dia e a disponibilidade de materiais é de 200 gramas por dia.

Qual o modelo de programação linear pode representar a intenção da Essencial de maximizar seu lucro, determinando quanto deve ser produzido de cada tipo de essência?

Um modelo matemático (programação linear) apresenta uma resposta à seguinte questão: Qual a quantidade de cada uma das essências A, B e C, devem ser produzidas para maximizar o lucro?

2) Problemas de mistura

Problemas de mistura consistem em combinar materiais obtidos da natureza (ou sobras de outros já previamente combinados) para gerar novos materiais ou produtos com características convenientes. Nesse sentido, uma indústria produz diversos tipos de rações e tem como objetivo minimizar os custos de produção, atendendo às restrições com relação à composição determinada para cada tipo de ração.

Outra questão pode ser a de determinar níveis de uso de insumos na composição de um tipo de ração, e nesse caso, as restrições se referem às características nutricionais que o produto acabado deve possuir, às quantidades de matérias-primas e insumos disponíveis, e à demanda.

Exemplo: mistura

Vamos tomar como exemplo uma ração que deve ser formulada a partir da mistura de três tipos de grãos. Esses grãos possuem quatro tipos de nutrientes, que são considerados no produto final. As informações sobre os grãos e nutrientes constam na Tabela 1, bem como os custos por unidade de peso de cada tipo de grão, e as variáveis de decisão associadas a cada tipo de grão.

Nutrientes	Grão 1	Grão 2	Grão 3	Necessidade mínima
A	2	3	7	1250,00
B	1	1	0	250,00
C	5	3	0	900,00
D	0,6	0,25	1	232,50
Custo por unidade de peso (\$)	41,00	35,00	96,00	
Variáveis de decisão	X_1	X_2	X_3	

Tabela 1. Problema clássico em PO. "Mistura".

Nesse contexto, as três variáveis de decisão são restritas a valores não negativos. Um segundo conjunto de restrições poderia ser acrescentado a essa formulação: restrições relacionadas às quantidades disponíveis de cada tipo de grão. Da mesma forma que as restrições foram escritas diretamente das linhas da Tabela 1, as restrições de disponibilidade de grãos seriam obtidas das colunas da mesma tabela.

Problemas práticos

A PO trata de problemas de diferentes áreas, problemas reais que são resolvidos por meios de técnicas. Citamos três técnicas de PO (programação linear, modelos de rede

e teoria das filas), e para cada uma indicamos alguns tipos de problemas que podem ser resolvidos por seu intermédio:

[/destacar]

- **Programação linear:** mix de produção, mistura de matérias-primas, modelos de equilíbrio econômico, carteiras de investimentos, roteamento de veículos, jogos entre empresas.
- **Modelos de rede:** rotas econômicas de transporte, distribuição e transporte de bens, alocação de pessoal, monitoramento de projetos.
- **Teoria das filas:** congestionamento de tráfego, operações de hospitais, dimensionamento de equipes de serviço.

[/destacar]

Importante: A **associação da técnica** ao tipo de problema não é fixa, um mesmo problema pode ser estudado por meio de mais de uma técnica de PO.

BOX: DICA

Há diferentes métodos quantitativos para resolver problemas de um mesmo tipo e caberá ao profissional escolher o método mais adequado e a ferramenta que irá utilizar e que, muitas vezes, depende do tipo de informação que temos à disposição. Durante sua formação e vida profissional, você aprenderá sobre diversos métodos e ferramentas computacionais e será fundamental que saiba mobilizar aqueles conhecimentos, habilidades e competências que sejam relevantes para a resolução de cada problema.

TÉCNICAS E MÉTODOS UTILIZADOS EM PO

A programação linear é uma das principais técnicas utilizadas na PO, que se popularizou no período da Segunda Guerra Mundial. Nesse sentido, por meio de funções matemáticas, Dantzig colaborou para a minimização de vários custos militares dos Estados Unidos, ou seja, otimizou os resultados.

Programação linear

A programação linear é uma técnica simples e eficiente, porém não é o único método de otimização que a PO aplica.

A questão central na construção do modelo matemático de PO é escolher os valores das variáveis de decisão de modo que você obtenha o melhor resultado da função objetivo, sujeita às restrições especificadas.

A característica principal do **modelo matemático** que caracteriza a **programação linear** é a linearidade de equações e inequações que compõem o modelo.

Uma equação linear, nos modelos de PO, tem a forma:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n = c_1$$

Onde:

$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$: *coeficientes (conhecidos)*

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$: *variáveis (desconhecidas)*

Em matemática, chamamos de **sistemas lineares** os conjuntos de equações lineares sobre as mesmas variáveis e o modelo de programação linear é um exemplo desse sistema. O modelo matemático de **programação linear** é formado por três componentes básicos:

- Variáveis de decisão;
- Função objetivo;
- Restrições.

A estrutura de um modelo de programação linear (PL) é sempre a mesma, seja ele um problema sobre mix de produção, mistura, transporte ou alocação, dentre outros. Conhecendo essa estrutura, será mais fácil construir o modelo matemático (PL), porque seja qual for o contexto, a estrutura se repete. A Figura 2 sintetiza essa estrutura do modelo de PL:

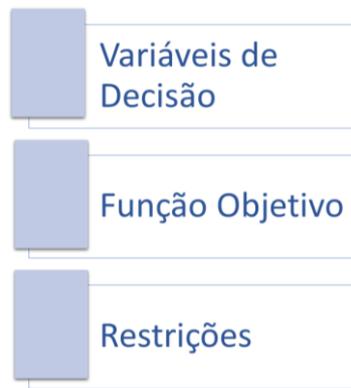


Figura 2. Estrutura da programação linear (modelo matemático).

Variáveis de decisão

As variáveis de decisão representam as variáveis que devem ser encontradas como solução do modelo e os parâmetros (coeficientes) são valores dados no problema.

Função objetivo

É uma função matemática que define a qualidade da solução em função das variáveis de decisão. É um critério de escolha das variáveis de decisão representado por uma função.

Restrições

As restrições representam as limitações do sistema, às quais o processo de maximização da função objetivo deve estar submetido.

A forma geral de um modelo matemático de programação linear, apresenta a estrutura: declaração das variáveis de decisão, função objetivo, restrições. Como o modelo recai em um sistema linear, que posteriormente será resolvido por métodos baseados em matrizes, alguns coeficientes do modelo podem ser denotados com índices como se identifica elementos de matrizes, indicando a posição na matriz (linha, coluna). Conforme Corrar e Garcia (2011), matematicamente, um modelo de programação linear tem a forma:

Max. ou Min.
 $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n \quad (1)$

Sujeito a:
 $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n < b_1$
 $a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n < b_2 \quad (2)$

 $a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n < b_m$

Onde: $x_i \geq 0$ e $b_j \geq 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$

(1) é a função matemática que codifica o objetivo do problema e é denominada função objetivo.
 (2) são as funções matemáticas que codificam as principais restrições identificadas.

Figura 3. Modelo de programação linear. **Fonte:** CORRAR; GARCIA, 2011, p. 6.

EXPLICANDO

- As variáveis de decisão são aqueles elementos em função dos quais pode-se obter lucro ou gerar custo (são as variáveis que estarão na sua função objetivo e nas restrições);
- Ao definir as unidades de medida de cada variável de decisão, faça-o com precisão;
- Não confundir variáveis de decisão com os parâmetros do problema. Por exemplo, a quantidade de mesas ou cadeiras que devem ser produzidas são variáveis de decisão, enquanto madeira e parafusos são parâmetros do problema, os quais são limitados.

A seguir, você vai acompanhar a apresentação de um problema, com a descrição de cada um dos elementos de um modelo de programação linear, para esse problema específico, envolvendo investimentos. Primeiro, temos a descrição do caso e em seguida, a explicação e identificação de quais são as variáveis de decisão, função objetivo e restrições. Não se preocupe neste momento, com a formulação matemática, e sim, em entender quais as informações definem os elementos do modelo (variáveis de decisão, restrições, e o que queremos maximizar).

Problema

Um investidor possui R\$ 200.000,00 para aplicar em ações. Esse investidor está avaliando as ações de duas empresas:

TeleX, cujas ações custam R\$ 60,00 cada e o retorno esperado é de R\$ 6,00 ao ano.

TeleY, cujas ações custam R\$40,00 cada e o retorno esperado é de R\$5,00 ao ano.

O investimento não deve ultrapassar R\$60.000,00 em uma única empresa. Como ele deve planejar seu investimento, de modo a maximizar seu lucro anual?

Precisamos entender o contexto.

Variáveis de decisão

*Se o objetivo é maximizar o lucro, temos que pensar em função de quem ocorre esse lucro. Essas serão as **variáveis de decisão**!*

- *Quantidade de ações da TeleX;*
- *Quantidade de ações da TeleY.*

Função objetivo

*Função (equação) que representa o que se deseja maximizar, nesse caso, **maximizar função de lucro.***

Restrições

*Limites aos quais a função objetivo deve se sujeitar no processo de maximização. Como o **investimento não deve ultrapassar R\$60.000,00 em cada empresa, isso é restrição do modelo.** Será representada por inequações. As variáveis de decisão são quantidades de ações, e isso não tem como ser negativo, então as variáveis de decisão serem maiores ou iguais a zero é outra restrição do modelo.*

A abordagem de um problema por meio da programação linear, envolve a execução de duas etapas:

- **Formulação do modelo matemático;**
- **Resolução.**

Na etapa de **formulação**, você transforma o problema real em um modelo matemático (linear), em geral, simplificando o problema.

Na etapa de **resolução**, você aplica as técnicas de programação linear no modelo e encontra a solução ótima.

Qual a relevância **de cada uma dessas etapas?**

Tanto a formulação do problema, quanto a resolução são importantes, mas podemos fazer algumas ponderações:

- Muitos livros de PO focam na resolução do modelo matemático, relegando a etapa de formulação;
- Na etapa de formulação de modelos é preciso coletar os dados específicos de cada organização, o que não pode ser realizado por qualquer pessoa, mas por alguém que realmente conheça o negócio da organização;
- Para a etapa de resolução do problema, você pode pedir ajuda para algum especialista em programação linear ou então contratar uma consultoria;
- Quando o modelo matemático já foi construído, qualquer pessoa com conhecimentos das técnicas de programação linear pode encontrar a solução do problema.

Os modelos podem ser formulados por caminhos diferentes, não há um modo único para a formulação que é uma tarefa complexa e que depende de diversos fatores. As informações necessárias para formular os modelos, em geral, apresentam as seguintes características:

- Estão em diversos lugares de uma organização, não estão concentradas;
- Não são precisas;
- Essas informações não estão prontas para uso, precisam ser coletadas ou estimadas.

Embora seja uma etapa complexa, a sequência de passos que será descrita no próximo tópico é uma maneira que pode facilitar a formulação de problemas.

Para construir o modelo matemático, você precisa responder às questões:

- Qual é o objetivo?
- O que maximizar (ou minimizar)?
- Quais são as variáveis de decisão?
- Quais são as restrições do problema?

Por exemplo:

Uma indústria de móveis produz três produtos: cadeiras, mesas e estantes. Esses produtos consomem tempo nos processos de montagem e de acabamento. Os tempos necessários para cada produto, em cada processo, e a respectiva disponibilidade de tempo, são:

Cadeira: 4 horas de montagem e 6 horas de acabamento.

Mesa: 3 horas de montagem e 3 horas de acabamento.

Estante: 2 horas de montagem e 1 hora de acabamento.

Disponibilidade de 36 horas de montagem e 50 horas de acabamento.

Sabendo que cada cadeira será vendida por R\$ 100,00, cada mesa por R\$ 180,00 e cada estante por R\$ 150,00, quantas unidades de cada tipo de produto devem ser produzidas para atingir o maior lucro possível?

Observe o modelo de programação linear que representa esse problema:

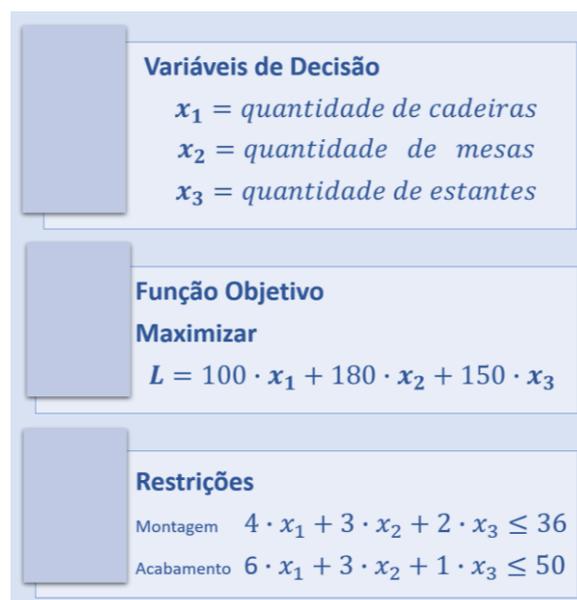


Figura 4. Modelo de programação linear do problema.

Definir o **objetivo** pode não ser tão óbvio, pois em um determinado contexto, o objetivo de uma empresa pode ser o de aumentar o número de clientes, mesmo com menor lucro. Em outro contexto, o objetivo pode ser a maximização do lucro, dependendo da estratégia da empresa.

As **variáveis de decisão** podem ser escolhidas por quem está formulando o problema, em função de sua relevância no caso em estudo. Já as **restrições** estão postas, em geral, não podem ser escolhidas pelo gestor.

O aplicativo mais difundido para tratar problemas de PO é o Excel e seu suplemento Solver. Há, inclusive, livros de PO que usam o Excel na resolução dos problemas.

De qualquer forma, a modelagem matemática sempre será uma tarefa a ser cumprida por quem está realizando o estudo do caso: o analista. Nenhum software vai abstrair o problema da realidade, decidir quais serão as variáveis e restrições, para então traduzi-lo em linguagem matemática. O pensar sobre o caso real e a construção do modelo permanecem sob domínio do profissional que realiza o estudo em PO.

Então o que os aplicativos fazem?

Como em muitas outras áreas, os softwares que tratam de problemas abordados pela PO realizam as operações matemáticas necessárias para resolver o problema, que previamente foi modelado pelo profissional.

No caso da aplicação da técnica de programação linear, por meio do suplemento Solver do Excel, o profissional registra em uma planilha a estrutura do problema (modelagem matemática), compostas pelas variáveis de decisão, função objetivo (equação) e restrições (inequações). Só depois disso abrirá o suplemento Solver para registrar alguns parâmetros da programação linear.

A Figura 5 apresenta a modelagem matemática de um problema em que se aplicou a técnica da programação linear, em uma planilha Excel.

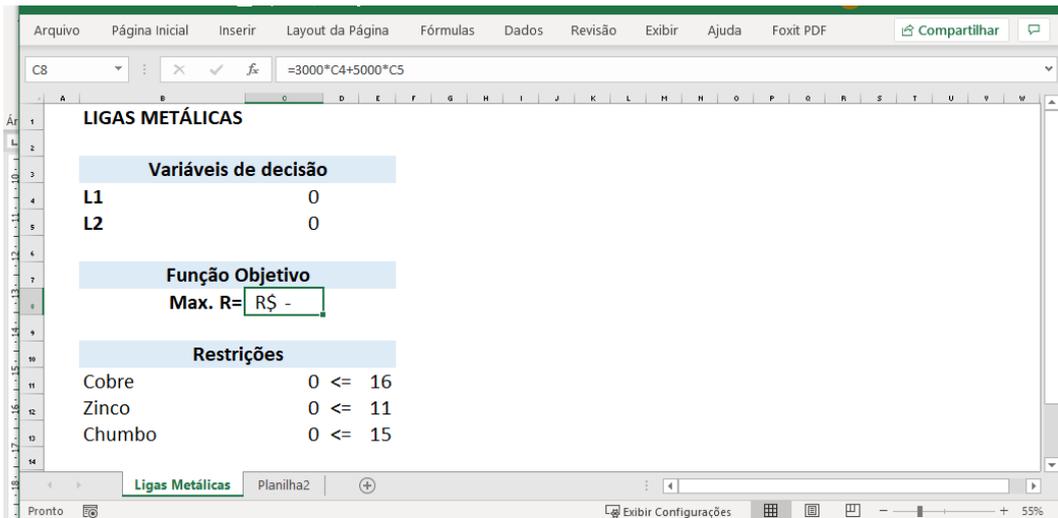


Figura 5. Modelo matemático (programação linear) no Excel.

Veja que a função objetivo (descrita Fluxograma 1 no campo superior f_x) foi escrita em função das células C4 e C5, que são as células que guardam os valores assumidos pelas variáveis de decisão L1 e L2, ou seja, a solução do problema. Este ainda não foi resolvido, por isso costuma-se colocar zero nas células destinadas às variáveis de decisão (C4 e C5).

Como as variáveis de decisão estão zeradas, inicialmente, as células contêm as expressões matemáticas das restrições do modelo também ficam zeradas até que se resolva o problema.

Na Figura 6, vemos o suplemento Solver do Excel. Nessa janela, temos que entrar com alguns argumentos extraídos do problema e só então o Solver irá resolvê-lo. Na Figura 6, o problema já foi solucionado pelo Solver.

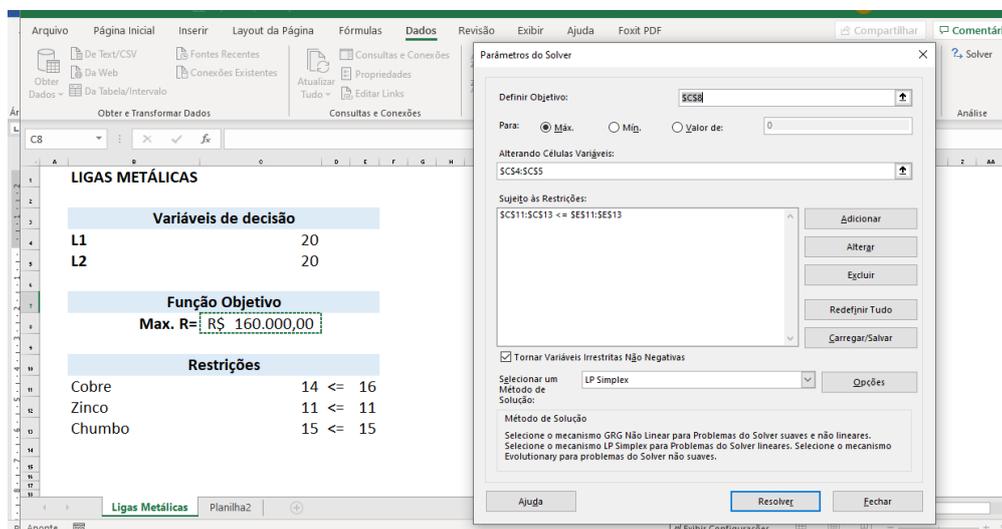


Figura 6. Modelo matemático de programação linear resolvido no Solver Excel.

Outras técnicas

Há outras técnicas que costumam ser aplicadas na resolução de problemas. Esses métodos quantitativos de resolução de PO são baseados em conceitos matemáticos e estatísticos.

Algumas outras técnicas aplicadas em estudos de PO são:

- **Simulação:** A simulação é uma das técnicas mais utilizadas em PO. É uma ferramenta bastante flexível, poderosa e intuitiva, e por isso, vem se popularizando. Essa técnica consiste no uso de um computador para imitar (simular) a operação de um processo ou sistema. Existem alguns softwares que realizam simulações como o Arena e o ProModel. A Figura 7, apresenta uma tela de simulação realizada no ProModel.

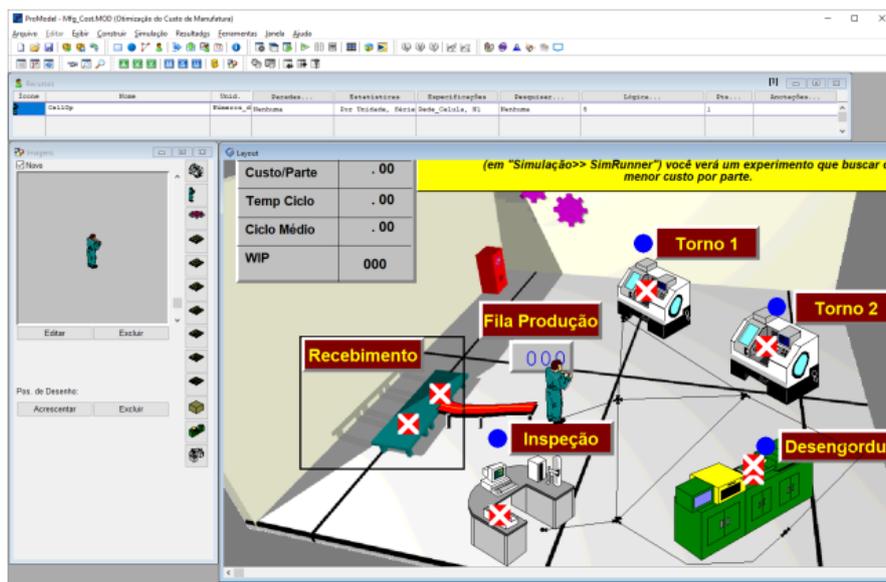


Figura 7. Exemplo de modelo para simulação Mfg_Cost.MOD. **Fonte:** Belge Engenharia (CDROM).

- **Análise PERT** (*Program Evaluation and Review Technique*): Este método que significa Técnica de Avaliação e Revisão de Projetos, surgiu em 1958 na Marinha americana, sendo aplicado no planejamento e controle do projeto Polaris (míssil norte-americano). É considerado como uma técnica de redes, baseado na teoria dos grafos, sendo classificado como modelo pictórico de pesquisa operacional (ROBERTO, 2007).

O **PERT** é um **modelo probabilístico**, que utiliza três estimativas de tempo e a **distribuição de probabilidade Beta** para a **determinação do tempo mais provável**. Nesse sentido, o tempo previsto de conclusão de um projeto será a soma de todo o tempo esperado de atividades no caminho crítico.

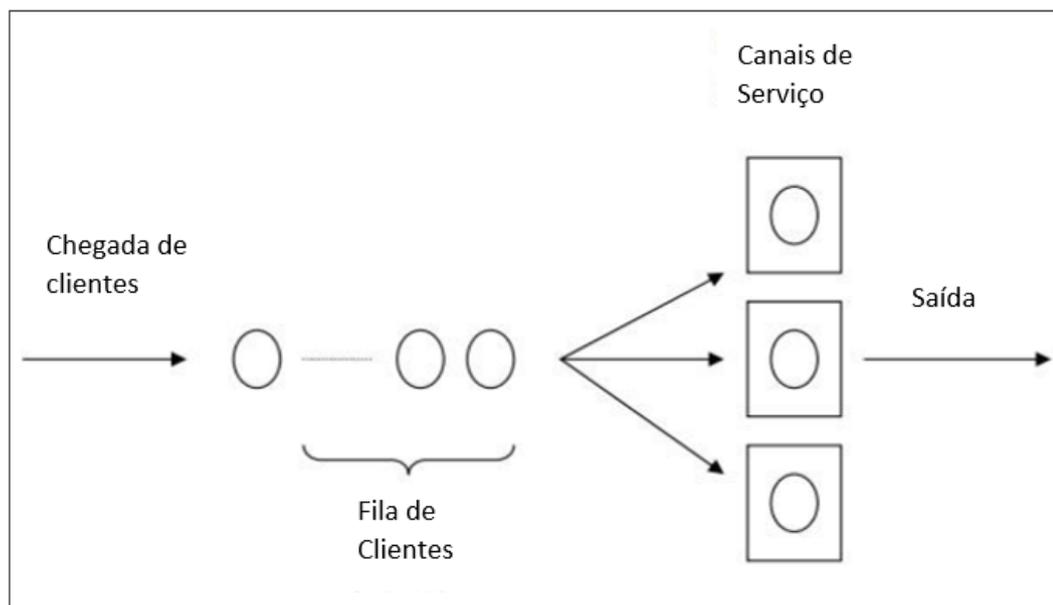
O **CPM** é um **modelo determinístico**, que considera uma sequência de atividades com **tempo fixo** e acredita que os tempos de atividade são conhecidos e podem ser variados, alterando o nível de recursos utilizados.

Na Diagrama 4, temos uma comparação entre as duas técnicas, análise PERT e CPM.



Diagrama 4. Técnicas PERT e CPM.

- **Teoria das filas:** Consiste no estudo do tempo de espera, por meio de modelos que representam os diferentes tipos de sistemas de filas (sistemas que envolvem filas do mesmo tipo) que emergem da prática. Esses modelos de filas são eficientes na determinação de como operar um sistema de filas da melhor forma. Uma capacidade de atendimento excessiva envolve custos majorados, por outro lado, não ter capacidade de atendimento suficiente gera excesso de espera e implicações negativas. Os modelos de filas podem determinar um ponto de equilíbrio entre custo e tempo de espera. A Fluxograma 3 mostra um sistema com uma fila e múltiplos canais.



Fluxograma 3. Sistema com uma fila e múltiplos canais.

O caso do Banco Itaú

A Figura 9 apresenta um **modelo de simulação** construído e rodado no software ProModel, utilizado para simular **filas** nos atendimentos de agência do Banco Itaú. Nesse caso, mesmo estudando um problema envolvendo filas, foi aplicada a técnica da simulação, por meio do ProModel.

Segundo publicado no site da Belge Engenharia, o modelo permitiu ao gerente planejar o atendimento diário, o que os bancos costumam fazer baseados na experiência, sem estudo algum. Esse projeto fez parte do programa interno do banco chamado de Agir, que estabeleceu metas de tempo máximo de espera.

O analista encarregado do Banco Itaú, Messias dos Santos, informou à Belge que as experiências piloto já estavam iniciando e que a meta seria implementar o programa nas 900 agências do Itaú, e em 1,1 mil postos de atendimento e, posteriormente, nas redes do Banerj e do Bemge.

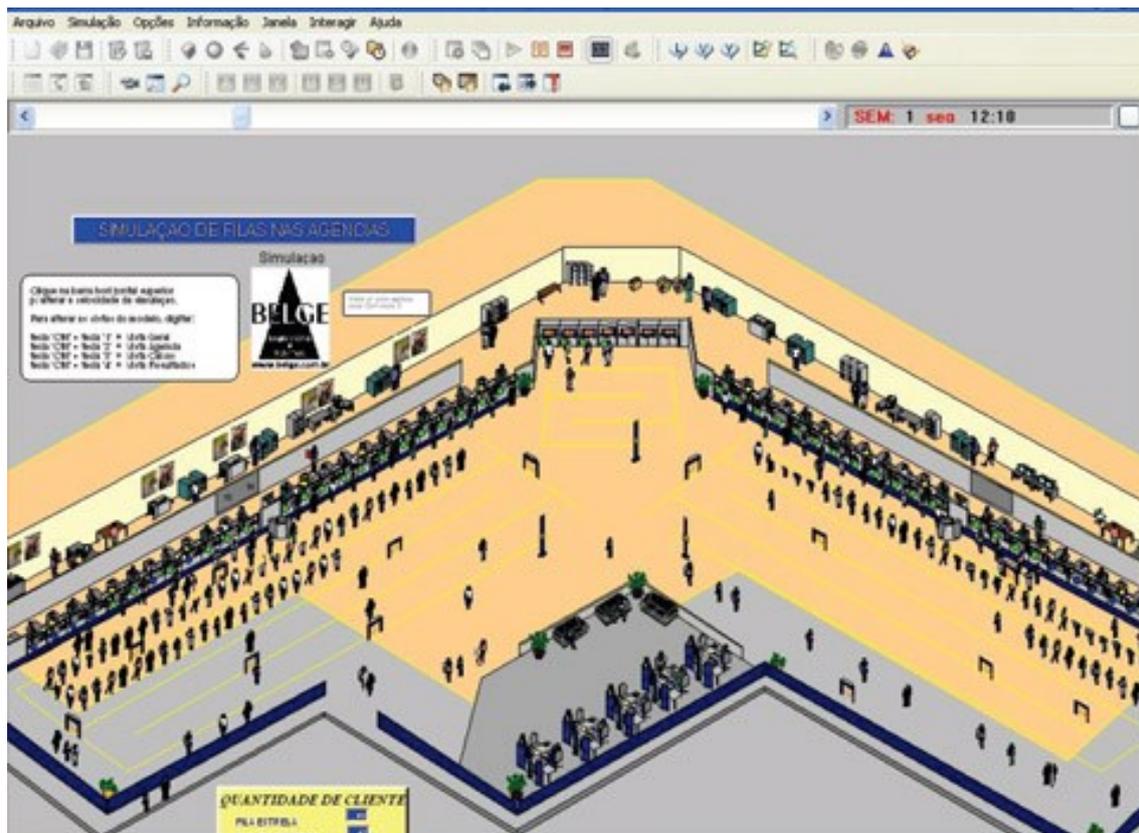


Figura 9. Modelo de simulado de agência do Banco Itaú. **Fonte:** BELGE CONSULTORIA. Acesso em: 13/10/2020.

Questão proposta

As variáveis de decisão de um modelo de programação linear compõem:

- a) **função objetivo**
- b) modelo real;
- c) restrições;

Justificativa: as variáveis de decisão serão as variáveis que vão compor, tanto a função objetivo, quanto as equações ou inequações que representam as restrições.

[/objeto de aprendizagem]

SINTETIZANDO

Nesta unidade, você estudou que a PO é uma área de estudo, que envolve métodos para tomada de decisões, abordados por diferentes técnicas. Por meio de um exemplo, podemos entender o que ocorre quando solucionamos problemas sem o uso da PO: as soluções encontradas não são tão boas, implicando lucros menores e consumo desnecessário de recursos.

O estudo de um problema por meio da PO é realizado, basicamente, em seis fases que são: elaboração do problema, construção do modelo matemático, desenvolvimento dos cálculos com uso do modelo, testagem do modelo e da solução, controle das soluções e implantação e acompanhamento.

Em geral, o objetivo é resolver o problema de forma que, lucros, produtividade ou outra variável seja maximizada ou custos, perdas e outras variáveis sejam minimizadas, submetendo esse objetivo a alguns limites (restrições), na busca da melhor solução possível (solução ótima).

Vimos que na PO o método principal é a programação linear, porque é o método mais conhecido e aplicado nessa área.

A PO envolve conhecimentos de matemática e estatística, porém, PO não é sinônimo nem de matemática nem de estatística e possui sua própria relevância na resolução de problemas de otimização.

Bons estudos!

Palavras-chave

1. Pesquisa operacional
2. Solução
3. Modelo matemático
4. Programação linear
5. Modelo de programação linear
6. Maximização
7. Minimização
8. Otimização
9. Variáveis de decisão
10. Função objetivo
11. Restrições
12. Limites
13. Matemática
14. Mix de produção
15. Técnicas
16. Modelo
17. Fases de um estudo de PO
18. Filas
19. Simulação
20. Sistemas lineares

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARENALES, M.; MORABITO, R.; ARMENTANO, V.; YANASSE, H. **Pesquisa operacional para cursos de engenharia**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

BASTOS, L. S. L.; SIMÕES, V. H. F.; MENDES, M. L.; RODRIGUES, F. B.; MARTINS, V. W. B. Rede PERT/CPM como instrumento de análise do sequenciamento de projetos em uma empresa de sistemas integrados de ERP. In: Simpósio de Engenharia de Produção, 21., 2014, Bauru. **Anais...** Bauru: UEPEA, 2014. [n.p.].

BELGE CONSULTORIA. **Case Itaú**. [s.l.], [s.d.]. Disponível em: < https://www.belge.com.br/serhos_itaú_Port.php>. Acesso em: 13/10/2020.

COHEN, E.; LIMA, H. R.; ALMEIDA, W. R. M.; GERÔNIMO, M. S.; SALLES, J. A. A. Teoria de filas aplicada na solução de transportes. In: OLIVEIRA, R. D.; CUTRIM, R. M.; SALLES, J. A. A.; AGOSTINO, I. R. S. **Pesquisa operacional no contexto das organizações**. 1. ed. São Luís: Editora Motres, 2018.

CORRAR, L. J.; GARCIA, E. A. da R. Programação linear: uma aplicação à contabilidade de custos no processo de tomada de decisão. In: Congresso Internacional de Custos, 7., 2011, León. **Anais...** León: Universidade de León, 2011. [n.p.].

BELFIORE, P.; FÁVERO, L. Pesquisa Operacional Para cursos de Engenharia – Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

FOGLIATTI, M. C.; MATTOS, N. M. C. **Teoria de filas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2007.

HILLIER, F.S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9. ed. São Paulo: McGraw Hill, 2013.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. 5. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2018.

ROBERTO, M. Pert COM. **Administradores.com**, [s.l.], 18 ago. 2007. Disponível em: <<https://administradores.com.br/artigos/pert-cpm>>. Acesso em: 11 out. 2020.